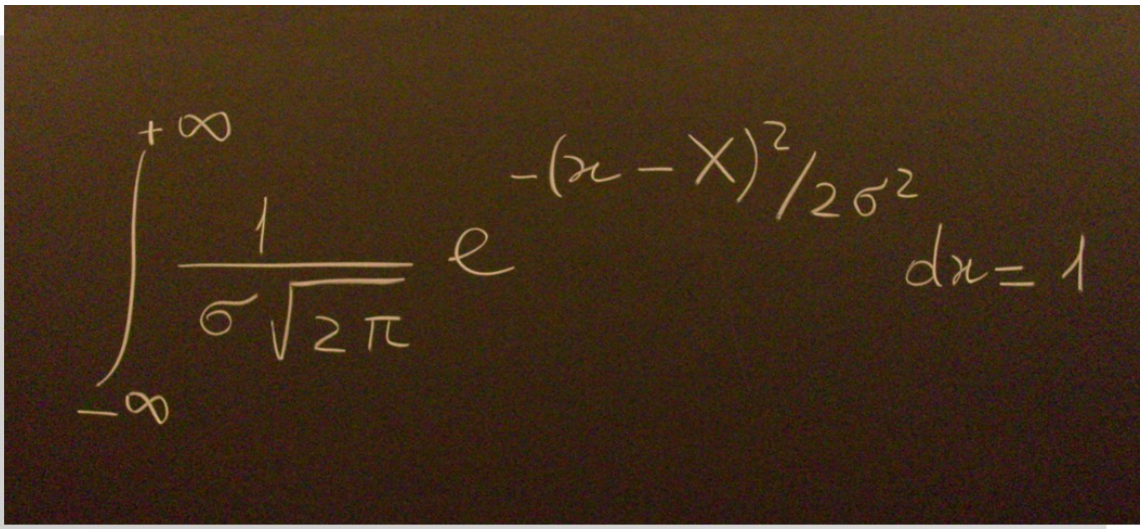
Aurelio Agliolo Gallitto

Introduzione al Laboratorio di Fisica

gli errori nelle misure sperimentali



Aurelio Agliolo Gallitto

Introduzione al Laboratorio di Fisica

gli errori nelle misure sperimentali

Università degli Studi di Palermo

Aurelio Agliolo Gallitto

Introduzione al laboratorio di fisica

gli errori nelle misure sperimentali

Copyright © 2016 Aurelio Agliolo Gallitto, Dipartimento di Fisica e Chimica dell'Università degli Studi di Palermo

V. 12.4.0 – Revisione del 21.11.2022

L'esperienza suggerisce che scrivere un libro privo di errori è praticamente impossible, per questo motivo l'autore sarà grato a chiunque vorrà segnalare eventuali errori e suggerimenti inviando un e-mail a: aurelio.agliologallitto@unipa.it.



L'opera *Introduzione al Laboratorio di Fisica: gli errori nelle misure sperimentali* di *Aurelio Agliolo Gallitto* è sotto licenza Creative Commons, Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 3.0, Licenza Italiana. Per le citazioni, le riproduzioni grafiche e fotografiche appartenenti alla proprietà di terzi, inseriti in quest'opera, l'autore è a disposizione degli aventi diritto non potuti reperire, nonché per eventuali non volute omissioni e/o errori di attribuzione nei riferimenti bibliografici.

Indice

Prefazione vii

1 Le grandezze fisiche 1

1.1 Grandezze fondamentali e grandezze derivate . . . 2
1.2 Sistemi di unità di misura . . . 3
1.2.1 Il Sistema Internazionale di Misure . . . 3
1.2.2 Nota storica . . . 6
1.2.3 Multipli e sottomultipli . . . 8
1.3 Grandezze adimensionali . . . 9
1.3.1 Definizione di angolo . . . 9
1.4 Notazione scientifica . . . 11
1.5 Cifre significative . . . 14
1.6 Esercizi . . . 15
1.7 Quesiti . . . 17

2 Gli errori nelle misure dirette 19

2.1 Cause di errore nelle misure dirette . . . 20
2.1.1 Stima delle incertezza nella lettura di scale . . . 22
2.2 Strumenti di misura . . . 25
2.2.1 Curva di risposta . . . 26
2.2.2 Risoluzione e sensibilità . . . 27
2.2.3 Precisione e accuratezza . . . 32
2.2.4 Prontezza e tempo di risposta . . . 34
2.3 Strumenti analogici . . . 35
2.3.1 Strumenti meccanici . . . 35
2.3.2 Strumenti elettromeccanici . . . 36
2.4 Strumenti digitali . . . 40
2.5 Esercizi . . . 44

2.6 Quesiti 46

3 Gli errori nelle misure indirette - I **47**
3.1 Errori nelle misure dirette 48
3.2 Errori nelle misure indirette 50
3.2.1 Propagazione degli errori nelle somme e nelle differenze 50
3.2.2 Propagazione degli errori nei prodotti e quozienti 52
3.3 Errori indipendenti e casuali 57
3.4 Esercizi 62
3.5 Quesiti 63

4 Gli errori nelle misure indirette - II **65**
4.1 Funzioni arbitrarie di una variabile 66
4.2 Funzioni di più variabili 70
4.3 Esercizi 72
4.4 Quesiti 72

5 Analisi preliminare dei dati sperimentali **73**
5.1 Indici di posizione 74
5.1.1 Semisomma 74
5.1.2 Media aritmetica 74
5.1.3 Mediana 75
5.1.4 Moda 76
5.2 Indici di dispersione ed errori casuali 76
5.2.1 Semidispersione ed errore assoluto massimo 76
5.2.2 Varianza 76
5.2.3 Scarto quadratico medio e deviazione standard 77
5.2.4 Deviazione standard della media 77
5.3 Media ponderata o pesata 78
5.4 Errori strumentali, sistematici e casuali 79
5.5 Cifre significative nel valore di una grandezza 80
5.6 Discrepanza 83
5.7 Esercizi 85
5.8 Quesiti 85

6 Rappresentazione e analisi grafica dei dati sperimentali **87**
6.1 Rappresentazione grafica di dati sperimentali 87

6.2 Analisi dati con il metodo delle rette di massima e minima pendenza . . . 90
6.3 Curve di taratura . . . 95
6.4 Linearizzazione e scale logaritmiche . . . 95
6.4.1 La scala logaritmica . . . 95
6.4.2 Funzioni linearizzabili . . . 98
6.5 Proposte di esperienze di laboratorio . . . 105
6.6 Esercizi . . . 107
6.7 Quesiti . . . 109

7 Analisi statistica degli errori casuali 111
7.1 Diagrammi a barre e istogrammi . . . 112
7.2 Distribuzione limite . . . 118
7.3 Proposte di esperienze di laboratorio . . . 124
7.3.1 Distribuzione statistica delle lunghezze di un campione di chiodi . . . 124
7.3.2 Misura del periodo di oscillazione di un oscillatore armonico semplice 125
7.4 Esercizi . . . 126
7.5 Quesiti . . . 127

8 La distribuzione normale o di Gauss 129
8.1 La funzione di Gauss . . . 130
8.1.1 Standardizzazione . . . 132
8.1.2 Nota storica . . . 133
8.2 Valore medio e valore centrale della distribuzione normale . . . 134
8.3 Deviazione standard e parametro di larghezza . . . 135
8.4 Esercizi . . . 136
8.5 Quesiti . . . 137

9 Distribuzioni di probabilità 139
9.1 Distribuzione discreta di probabilità . . . 140
9.2 Distribuzione continua di probabilità . . . 140
9.2.1 Funzione di probabilità cumulata o funzione di ripartizione . . . 142
9.3 Integrale normale degli errori . . . 144
9.4 Giustificazione della media come migliore stima . . . 147
9.5 Giustificazione della deviazione standard . . . 148
9.5.1 Deviazione standard della media . . . 149
9.5.2 Incertezza nella deviazione standard . . . 150
9.6 Ulteriori applicazioni del principio di massima verosimiglianza . . . 151

9.7 Esercizi . . . 151
9.8 Quesiti . . . 152

10 Considerazioni conclusive sugli errori **153**
10.1 Interpretazione probabilistica dell'errore casuale . . . 153
10.2 Errore statistico ed errore strumentale . . . 154
10.3 Discrepanza e analisi statistica . . . 156

A Esercizi di ricapitolazione **159**

B Elementi di teoria della probabilità e statistica **165**
B.1 Definizione classica di probabilità . . . 166
B.2 Definizione frequenzistica (o frequentista) di probabilità . . . 166
B.3 Teoria assiomatica delle probabilità . . . 167
B.3.1 Probabilità condizionata . . . 171
B.3.2 Eventi indipendenti . . . 172
B.3.3 Eventi incompatibili o mutuamente esclusivi . . . 172
B.4 La statistica . . . 172

C Oscillatore armonico reale **175**
C.1 Oscillatore armonico con molla di massa non trascurabile . . . 175
C.2 Oscillatore viscoelastico . . . 178

D Metodo dei minimi quadrati **181**

E Integrale normale degli errori **183**

F Il calibro a corsoio e il calibro Palmer **185**
F.1 Calibro a corsoio . . . 185
F.2 Calibro Palmer o micrometro . . . 190

G Acquisizione dati con i sensori *real time* **193**
G.1 Vernier Graphical Analysis . . . 193
G.2 Sensore di movimento Go Direct . . . 196
G.2.1 Caratteristiche tecniche del sensore . . . 198

H Acquisizione dati con l'uso dello smartphone **199**
H.1 Misura del periodo di oscillazione di un oscillatore armonico massa-molla . 200
H.2 Misura della velocità angolare di un dispositivo rotante a basso attrito . . . 202

I Foglio di calcolo **205**

I.1 Riferimenti tra celle 205

I.2 Riferimenti relativi e riferimenti assoluti 206

J Analisi e rappresentazione grafica di dati: il programma SciDAVis **209**

K Suggerimenti per la stesura delle relazioni di laboratorio **213**

L Multipli e sottomultipli **217**

M Alfabeto greco **219**

N Costanti fisiche di uso frequente **221**

Bibliografia e sitografia **223**

Indice analitico **226**

Prefazione

L'attività di laboratorio deve fornire agli studenti la possibilità di effettuare osservazioni quantitative di grandezze fisiche facilmente individuabili e analizzabili. Per questo motivo, bisogna pensare esperimenti "operativi", cioè esperimenti che possano essere eseguiti in laboratorio allo scopo di studiare la relazione tra le varie grandezze fisiche coinvolte e quindi determinare la relativa legge fisica. Questi esperimenti hanno valenze didattiche prevalenti per la misura, l'analisi dei dati, la formalizzazione della legge fisica e per gli aspetti formativi in generale. Gli esperimenti "illustrativi", cioè esperimenti in cui viene visualizzato un determinato fenomeno fisico, non sono indicati per attività di laboratorio finalizzata all'analisi dati; essi sono utili da mostrare in classe durante la lezione allo scopo di attirare l'attenzione degli studenti e stimolare la riflessione su una particolare fenomenologia, prima di trattare formalmente lo specifico argomento.

Il materiale raccolto in questo volume proviene sostanzialmente dalle lezioni di Laboratorio di Fisica tenuti dall'autore per i Corsi di Studio della ex Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali confluita poi nella Scuola delle Scienze di Base ed Applicate dell'Università degli Studi di Palermo. Nella prima parte del libro, viene affrontato il problema della stima degli errori nelle misure dirette e viene trattata la propagazione degli errori nelle misure indirette. Nella seconda parte, vengono introdotti i metodi elementari di analisi statistica dei dati sperimentali e viene quindi introdotta la funzione di distribuzione di Gauss per gli errori casuali. La trattazione degli argomenti è focalizzata principalmente sul significato fisico delle nozioni introdotte più che sul formalismo matematico-statistico, con un'esposizione non sempre completamente rigorosa.

Nel libro sono presenti molti esempi svolti e molti esercizi da svolgere come lavoro individuale. Alcuni esempi sono presentati al fine di sviluppare le capacità per l'utilizzo del computer per la rappresentazione grafica e l'analisi dei dati sperimentali e la loro presentazione. Va sottolineato che l'uso del computer è importante non solo per l'analisi dei dati ma anche per l'acquisizione automatica dei dati sperimentali; infatti, mediante opportuni sensori (sensori realtime) è possibile, per esempio, misurare grandezze che variano molto rapidamente o molto lentamente nel tempo, permettendo in questo modo di

percepire aspetti che difficilmente sarebbero visibili.

L'impostazione didattica del libro è il frutto dell'esperienza maturata dall'autore in molti anni di insegnamento. L'impostazione grafica, articolata in definizioni, riquadri ed esempi, rende più chiara l'esposizione degli argomenti. L'uso di grafici, ove possibile, rende più semplice e immediata la comprensione dei concetti.

Per agevolare la lettura, all'inizio di ogni capitolo è presente un sommario; alla fine del libro, l'indice analitico permette di individuare velocemente un argomento o una definizione. In ogni capitolo, oltre agli esempi svolti sono proposti vari esercizi e quiz di cui si dà solo la soluzione; un capitolo dedicato allo svolgimento di esercizi è presente come appendice. Inoltre, per evitare interruzioni di continuità, molti argomenti sono stati inseriti come appendice. Per scelta dell'autore, si è preferito usare il punto come separatore decimale anziché la virgola. Per il livello degli argomenti trattati, il libro è indicato per l'insegnamento del Laboratorio di Fisica nei Corsi di Studio a carattere scientifico.

L'autore desidera ringraziare tutti i docenti e studenti che, segnalando errori e imprecisioni, hanno contribuito a rendere questo lavoro più comprensibile.

Palermo, 15 febbraio 2016

Aurelio Agliolo Gallitto

Capitolo 1

Le grandezze fisiche

Indice

1.1 Grandezze fondamentali e grandezze derivate 2

1.2 Sistemi di unità di misura 3

1.2.1 Il Sistema Internazionale di Misure 3

1.2.2 Nota storica 6

1.2.3 Multipli e sottomultipli 8

1.3 Grandezze adimensionali 9

1.3.1 Definizione di angolo 9

1.4 Notazione scientifica 11

1.5 Cifre significative 14

1.6 Esercizi 15

1.7 Quesiti 17

Molti fenomeni fisici possono essere descritti mediante relazioni matematiche tra grandezze fisiche; tale possibilità è legata a un concetto operativo delle grandezze fisiche. Questo vuol dire che una grandezza può essere definita se si riesce a descrivere un concetto fisico in modo quantitativo, cioè se si riesce a stabilire un insieme di operazioni di laboratorio che consentano di associare al concetto un valore numerico.[1] Facciamo un esempio. Tutti abbiamo il concetto di "lunghezza", tuttavia se vogliamo parlare di lunghezza di un segmento abbiamo bisogno di eseguire delle operazioni, ossia delle misurazioni, che

[1] Un approfondimento sul concetto operativo delle grandezze fisiche si può trovare in: Bridgman P. W. (1965). *La logica della fisica moderna*. Boringhieri, Torino.

permettano di associare un numero a tale lunghezza; in questo modo, sarà anche possibile effettuare un confronto fra lunghezze di segmenti diversi. In generale, il significato della grandezza fisica è strettamente connesso con la possibilità di attribuire a essa, facendo ricorso a un idoneo metodo di misura, un valore numerico in un dato sistema di unità di misura; a tale valore si dà anche il nome di *misura della grandezza* nel sistema considerato. In conclusione, diremo che il valore ottenuto nella misurazione è la *misura*, invece il processo con cui si associa un numero a una grandezza è la *misurazione*.

1.1 Grandezze fondamentali e grandezze derivate

La definizione operativa di una grandezza fisica implica la scelta di un campione di riferimento, cioè di una *unità di misura*. Un certo numero di grandezze fisiche opportunamente scelte, e indicate come *grandezze fondamentali*, viene usato per la definizione operativa di tutte le altre grandezze, dette *grandezze derivate*. Le grandezze fondamentali sono fra loro indipendenti, nel senso che per ciascuna di esse l'introduzione della corrispondente unità di misura non implica alcuna relazione con le unità di misura delle altre; di conseguenza le unità di misura delle grandezze fondamentali, dette *unità fondamentali*, vengono fissate in modo del tutto arbitrario. La scelta delle grandezze fondamentali va effettuata con opportuni criteri; conviene, in particolare, scegliere grandezze che possano essere agevolmente misurate e delle quali sia possibile realizzare campioni ben riproducibili e di valore pressoché invariabile nel tempo. Grandezze come la *lunghezza*, la *massa* e il *tempo* posseggono questi requisiti.

Le grandezze derivate sono quelle la cui definizione operativa è fondata sull'uso delle grandezze fondamentali; pertanto, le unità di misura delle grandezze derivate, cioè le *unità derivate*, non possono essere definite in maniera arbitraria ma vanno introdotte sulla base delle relazioni che legano ciascuna grandezza derivata a una o più grandezze fondamentali. Per esempio, il concetto di velocità è legato a due grandezze fondamentali, la lunghezza e il tempo; infatti, la velocità, che indicheremo con la lettera v, è definita come rapporto fra la lunghezza Δl del percorso compiuto da un oggetto in movimento e l'intervallo di tempo Δt impiegato a compiere il percorso stesso: $v = \Delta l/\Delta t$. Di conseguenza, l'unità di misura della velocità va fissata sulla base delle unità scelte per la lunghezza e il tempo. Se queste sono, rispettivamente, il metro (m) e il secondo (s), la velocità andrà espressa in metri/secondo (m/s). Con lo stesso criterio si fisseranno le unità di misura di grandezze derivate come la superficie, il volume, l'accelerazione, la forza, il lavoro, l'energia, ecc.

Esempio 1.1. Una grandezza derivata che si incontra molto frequentemente è la superficie. Ci capita spesso di dovere misurare la superficie di qualche corpo, per esempio del nostro tavolo, della nostra stanza, ecc. La superficie è definita come prodotto tra due lunghezze; nel caso semplice di un quadrato essa è data dal prodotto del lato per se stesso: $S = l \times l = l^2$. Di conseguenza, l'unità di misura della superficie va fissata sulla base dell'unità di misura scelta per la lunghezza. Se questa è il metro (m), la superficie andrà espressa in m^2.

1.2 Sistemi di unità di misura

L'insieme delle unità fondamentali e di tutte le unità da esse derivate costituisce un *sistema di unità di misura*.[2]

1.2.1 Il Sistema Internazionale di Misure

In Italia è stato adottato il Sistema Internazionale di Misure,[3] indicato con la sigla SI. Le grandezze fondamentali assunte nel sistema SI sono la lunghezza, la massa, l'intervallo di tempo, l'intensità di corrente elettrica, la temperatura assoluta, la quantità di sostanza e l'intensità luminosa; le grandezze fondamentali del sistema SI sono riportate nella Tabella 1.1 insieme con le rispettive unità di misura e i simboli corrispondenti. Le unità di misura derivate si ottengono moltiplicando le unità fondamentali nell'ordine riportato in Tabella 1.1. Qui di seguito diamo solo la definizione delle grandezze fisiche fondamentali e le corrispondenti unità di misura, per un maggiore approfondimento si rimanda ai testi di fisica generale.

---

[2] L'introduzione di unità fisse di misura di lunghezze, di peso e di capacità, ebbe luogo nelle civiltà preelleniche, babilonesi ed egiziane, intorno al 2500 a.C.

[3] Il Sistema Internazionale (SI) è stato legalmente adottato in Italia con la Legge n. 122 del 14/04/1978 e con i D.P.R. n. 802 del 12/08/1982.

Tabella 1.1: Grandezze fondamentali del Sistema Internazionale (SI). Per ulteriori informazioni sulle unità di misura e le loro definizioni si veda: Fazio M. (1995). *Dizionario e manuale delle unità di misura*. III Ed. Zanichelli, Bologna; Bladon P. (2006). *A dictionary of international units*. II Ed. iUnivers, Lincoln.

Grandezza	**Simbolo**	**Unità di misura**	**Simbolo**
Lunghezza	l	metro	m
Massa	m	chilogrammo	kg
Intervallo di tempo	t	secondo	s
Intensità di corrente elettrica	i	ampere	A
Temperatura assoluta	T	kelvin	K
Quantità di sostanza	M	mole	mol
Intensità luminosa	I	candela	cd

Lunghezza: metro (m). Lunghezza del cammino percorso dalla radiazione elettromagnetica (luce) nel vuoto in un intervallo di tempo pari a 1/299792458 secondi. Il metro fu introdotto nel 1791, durante la Rivoluzione Francese, e definito come la quarantamilionesima parte di un meridiano terrestre; il metro campione fu realizzato nel 1872, con una barra costituita da una lega di platino al 90% e di iridio al 10%, ed è conservato al Bureau International des Poids et Mesures (Ufficio internazionale dei pesi e delle misure) presso il Pavillon de Breteuil a Sèvres, Francia.

Massa: chilogrammo (kg). La massa campione è la massa di un campione di una lega di platino al 90% e di iridio al 10%.[4]

Intervallo di tempo: secondo (s). Esprime la durata di 9192631770 periodi della radiazione elettromagnetica corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133 (^{133}Cs).

Intensità di corrente elettrica: ampere (A). Intensità della corrente elettrica costante che percorrendo due conduttori paralleli, rettilinei, di lunghezza infinita e di sezione trasversale trascurabile, posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro nel vuoto, produce tra questi una forza pari a 2×10^{-7} N per ogni metro di lunghezza dei conduttori.[5]

[4]Il campione di massa è conservato al Bureau International des Poids et Mesures presso il Pavillon de Breteuil a Sèvres, Francia.

[5]Un approfondimento storico sulla definizione dell'ampere si può trovare in: Agliolo Gallitto A. et al (2017). *The silver voltameter: an essential instrument for the definition of the unit of electric current*. Bull. Sci. Instrum. Soc. **134**, 26-28.

Temperatura assoluta: kelvin (K). È la frazione 1/273.16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua.[6]

Quantità di sostanza: mole (mol). È la quantità di materia di un sistema che contiene tante unità elementari quanti sono gli atomi di 0.012 kg di carbonio 12 (^{12}C); le entità elementari possono essere atomi, molecole, ioni, ecc. e devono quindi essere esplicitate.

Intensità luminosa: candela (cd). È l'intensità luminosa in una data direzione di una sorgente che emette radiazione elettromagnetica monocromatica nell'infrarosso alla frequenza di 540×10^{12} hertz e che ha un'intensità radiante in quella direzione di 1/683 watt per steradiante.[7]

Una breve storia dei campioni di unità di misura si trova in: Fazio M. (1971). *I campioni di unità di misura*. Le Scienze **31**, 40-50. Fra i vari sistemi di unità di misura, vale la pena menzionare anche i seguenti.

Il sistema MKS

Le unità di misura del sistema SI riguardanti le grandezze meccaniche (lunghezza, massa, intervallo di tempo, velocità, forza, energia, ecc.) sono frequentemente designate come unità MKS. Questa sigla è formata dalle iniziali delle unità fondamentali meccaniche, cioè **M**etro (m), **K**ilogrammo (kg) e **S**econdo (s).

Il sistema cgs

Nel sistema cgs si assumono tre sole grandezze fondamentali che coincidono con le grandezze fondamentali meccaniche del sistema SI e cioè la lunghezza, la massa e il tempo. Le unità di misura corrispondenti sono il **c**entimetro (cm), il **g**rammo (g) e il **s**econdo (s). Il centimetro è la lunghezza 100 volte più piccola del metro; il grammo è la massa 1000 volte più piccola del chilogrammo. La sigla cgs è formata, appunto, dalle iniziali delle unità fondamentali adottate.

Il sistema tecnico o pratico

Le grandezze fondamentali sono la lunghezza, la forza e il tempo. Le relative unità di misure sono il metro (m), il chilogrammo-forza (kg_f) e il secondo (s). Il chilogrammo-forza

[6] Il punto triplo dell'acqua è uno stato termodinamico in cui la fase solida, liquida e gassosa coesistono in equilibrio.

[7] La definizione di steradiante è data nel Paragrafo 1.3.1.

rappresenta la forza con cui la Terra attira la massa di un chilogrammo in corrispondenza dell'accelerazione di gravità misurata a Parigi.

Il sistema inglese

Le grandezze fondamentali sono la lunghezza, la forza e il tempo. Le relative unità di misura sono lo yard (y), la libbra inglese o pound (lb) e il secondo (s). A titolo di esempio, si ha che 1 y = 0.9143992 m. Il fattore numerico che esprime il rapporto tra le due unità di misura nei due sistemi di misura è detto *fattore di ragguaglio*.

Il sistema termo-tecnico

Le grandezze fondamentali sono la lunghezza, l'energia, il tempo e la temperatura. Le relative unità di misura sono il metro (m), la caloria (cal), il secondo e il grado centigrado (°C). La caloria, in particolare, è l'energia necessaria per elevare da 14.5°C a 15.5°C la temperatura di 1 g di acqua distillata. La caloria è uguale a 4.1868 J, dove il simbolo J indica il Joule, unità di misura dell'energia nel sistema internazionale: $[\mathrm{J}] = [\mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}}]$.

Cambiamento di sistema di unità di misura

Noto il valore di una grandezza espresso con una data unità di misura, per determinare il valore espresso con un'altra unità di misura è sufficiente conoscere il fattore di ragguaglio, r, dato dal rapporto tra le due unità di misura.

1.2.2 Nota storica

In Sicilia, dopo l'annessione della Sicilia al Regno d'Italia, con la Legge del 28 luglio 1861, approvata dal primo Parlamento d'Italia, venne introdotto il sistema metrico decimale.[8] Prima di allora in Sicilia, per esempio, l'unità di misura di lunghezza era la "canna", uguale a 8 "palmi" (1 canna è uguale a 2.0624 m, 1 palmo è uguale a 25.78 cm).[9] Nel 1862, vennero collocati nei mercati e nelle principali piazze delle città di tutta l'isola delle targhe di marmo dove sono riportati i fattori di ragguaglio delle antiche misure con il nuovo sistema metrico decimale. A Palermo ne esiste ancora oggi una, datata 28 aprile 1862, posta sulla facciata di palazzo Trigona, all'inizio di via Schiavuzzo accanto piazza Rivoluzione dove anticamente si teneva il mercato. Si può così sapere la corrispondenza

[8] Il sistema metrico decimale fu introdotto nel 1799 in Francia da una commissione di esperti istituita da Napoleone per la riorganizzazione dei pesi e delle misure.

[9] D. Scinà, *Elementi di Fisica*, dalla Società Tipografica de' Classici Italiani (Milano 1833).

tra il metro e la canna: 1 canna ≈ 2.06 m, tra il metro e il palmo: 1 palmo ≈ 26 cm e così per tutte le altre misure in uso in quel periodo. In Figura 1.1 è mostrata la targa di marmo, con incisi i fattori di ragguaglio tra le antiche misure con il sistema metrico decimale, posta sulla facciata di palazzo Trigona in via Schiavuzzo a Palermo.

La Collezione Storica degli Strumenti di Fisica dell'Università di Palermo custodisce un metro campione realizzato all'inizio dell'Ottocento con una barra bimetallica di acciaio e ottone sulla quale è incisa la scala con passo di 1 cm.



Figura 1.1: Targa di marmo, con incisi i fattori di ragguaglio tra le antiche misure con il sistema metrico decimale, posta sulla facciata di palazzo Trigona in Via Schiavuzzo a Palermo.

1.2.3 Multipli e sottomultipli

Dal momento che alcune unità di misura risultano troppo grandi o troppo piccole, esse vengono spesso usate sotto forma di *multipli* e *sottomultipli*. Nella Tabella 1.2 sono elencati i prefissi che posti davanti al simbolo di una unità di misura la convertono in un multiplo o sottomultiplo. Per esempio, il prefisso μ, che si legge micro, posto davanti al simbolo m, che indica l'unità metro, dà luogo all'unità μm; quest'unità è il micrometro e ha un valore 10^6 volte, cioè un milione di volte, più piccolo del metro.

Tabella 1.2: Prefissi usati per ottenere multipli e sottomultipli di una unità di misura; sono indicati anche i simboli e i valori dei multipli e sottomultipli.

Prefisso	**Simbolo**	**Valore**	**Esempi**
yocto	y	10^{-24}	ys (yoctosecondo)
zepto	z	10^{-21}	zs (zeptosecondo)
atto	a	10^{-18}	as (attosecondo)
femto	f	10^{-15}	fs (femtosecondo)
pico	p	10^{-12}	ps (picosecondo)
nano	n	10^{-9}	nV (nanovolt)
micro	μ	10^{-6}	μm (micrometro)
milli	m	10^{-3}	mm (millimetro)
centi	c	10^{-2}	cg (centigrammo)
deci	d	10^{-1}	dl (decilitro)
unità	–	**1**	**m (metro)**
deca	da	10	dam (decametro)
etto	h	10^2	hg (ettogrammo)
kilo	k	10^3	km (kilometro)
mega	M	10^6	MW (megawatt)
giga	G	10^9	GHz (gigahertz)
tera	T	10^{12}	THz (terahertz)
peta	P	10^{15}	Pm (petametro)
exa	E	10^{18}	Es (exasecondo)
zetta	Z	10^{21}	Zs (zettasecondo)
yotta	Y	10^{24}	Ys (yottasecondo)

1.3 Grandezze adimensionali

Una grandezza fisica si dice adimensionale se è definita come rapporto tra grandezze fra loro omogenee, cioè dello stesso tipo (per esempio, come rapporto tra due lunghezze o tra due masse). In questo caso, non ha senso parlare di unità di misura della grandezza, la quale sarà espressa semplicemente da un numero non seguito da indicazione di unità di misura. Nel paragrafo successivo vedremo un esempio di tali grandezze.

1.3.1 Definizione di angolo

Per poter definire correttamente l'angolo dobbiamo tener conto del fatto che, essendo già state scelte le grandezze fondamentali, l'angolo non può che essere una grandezza derivata; come tale, esso va definito in funzione di qualcuna delle grandezze fondamentali.

Consideriamo due semirette a e b uscenti da uno stesso punto O e, nel piano che le contiene, tracciamo una serie di circonferenze aventi il centro in O, come mostrato in Figura 1.2. Misuriamo le lunghezze s', s'', ... , degli archi individuati dalle semirette sulle circonferenze concentriche e le lunghezze R', R'', ... , dei raggi delle circonferenze corrispondenti; quindi, calcoliamo i rapporti s'/R', s''/R'', ... Constateremo che tali rapporti sono fra loro uguali, cioè che il rapporto s/R dipende solo dalla "spaziatura" fra le semirette considerate. Da queste considerazioni si perviene alla seguente definizione.

> Definiamo angolo compreso tra due semirette il rapporto fra la lunghezza s dell'arco intercettato dalle semirette su di una qualsiasi circonferenza avente il centro nel loro punto d'intersezione e il raggio R della circonferenza stessa:
>
> $$\alpha = \frac{s}{R}\,. \tag{1.1}$$

La grandezza definita dalla relazione (1.1) è adimensionale, in quanto è ottenuta come rapporto tra due lunghezze. Pertanto, conformemente a quanto è stato detto, il valore di un angolo dovrebbe essere espresso solo da un numero non seguito dall'indicazione di unità di misura. In pratica, si preferisce dire che, quando un angolo è definito dalla relazione (1.1), esso è misurato in *radianti*. È facile verificare, sulla base della definizione data, che i valori in radianti dell'*angolo giro*, dell'*angolo piatto* e dell'*angolo retto* sono rispettivamente 2π, π e $\pi/2$, essendo π il numero $3.1415\ldots$. È ben nota un'altra unità di misura per gli angoli, il *grado sessagesimale* (simbolo: °), definito come la $360-$*esima* parte dell'angolo giro. Invece, è meno nota la definizione di *grado centesimale* (simbolo: grad), definito come la $100-$*esima* parte dell'angolo retto e usato principalmente dall'artiglieria militare.

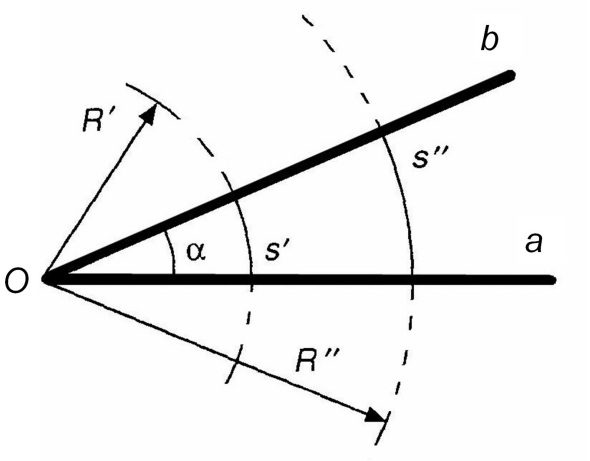


Figura 1.2: Definizione di angolo.

Nelle relazioni fra grandezze fisiche, però, gli angoli non possono essere espressi in gradi o in altre unità; come il *primo* e il *secondo*, definite con criteri di assoluta arbitrarietà e di indipendenza da ogni altra grandezza, perché, se così si facesse, si attribuirebbe implicitamente all'angolo il significato di grandezza fondamentale. Pertanto, è bene ricordare la seguente regola.

Nelle relazioni fra grandezze fisiche, gli angoli vanno espressi in radianti.

Il rapporto fra il valore di un angolo in gradi sessagesimali e il valore dello stesso angolo in radianti è eguale al rapporto tra i valori in gradi e in radianti di un angolo tipico (angolo giro, angolo piatto, angolo retto). In particolare, un angolo piatto è uguale a 180° e a π radianti, quindi:

$$\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{\alpha\ [^\circ]}{\alpha\ [\text{rad}]}\,, \tag{1.2}$$

da cui si ricavano le seguenti relazioni:[10]

$$\alpha\ [\text{rad}] = \frac{\pi}{180^\circ} \times \alpha\ [^\circ]\,, \tag{1.3}$$

$$\alpha\ [^\circ] = \frac{180^\circ}{\pi} \times \alpha\ [\text{rad}]\,. \tag{1.4}$$

Se si sostituisce ad α il valore di un angolo in gradi sessagesimali, la relazione (1.3) consente di calcolare il corrispondente valore dell'angolo in radianti, cioè di effettuare la

[10] Abbiamo usato la notazione [°] e [rad] per indicare che l'angolo α viene qui espresso rispettivamente in gradi sessaggesimali e in radianti.

conversione di gradi sessagesimali a radianti; per esempio, all'angolo di 45° corrisponde il valore

$$\alpha = \frac{3.142}{180^\circ} \times 45^\circ = 0.7853 \text{ rad}\,.$$

Con la relazione (1.4), si esegue la conversione da radianti a gradi sessagesimali; così, per $\alpha = 1.047$ rad abbiamo

$$\alpha = \frac{1.047}{3.142} \times 180^\circ = 60^\circ\,.$$

Il concetto di angolo, legato alla definizione appena data, può essere esteso allo spazio. Consideriamo un cono con vertice in un punto O e tracciamo, con centro in O, una qualsiasi superficie sferica. Il rapporto fra l'area S della porzione di sfera delimitata dal cono e il quadrato R^2 del raggio della superficie sferica tracciata è una quantità che non dipende dalla superficie considerata ma solo dall'apertura del cono; con tale rapporto, si definisce l'*angolo solido* Ω delimitato dal cono:

$$\Omega = \frac{S}{R^2}\,. \tag{1.5}$$

L'unità di misura dell'angolo solido Ω definito dalla relazione (1.5) prende il nome di *steradiante*.

Esempio 1.2. Si vuole determinare la lunghezza di un arco di circonferenza, di raggio $R = 20$ cm e angolo $\alpha = 15°$.

Prima, bisogna eseguire la conversione dell'angolo da gradi sessagesimali a radianti:

$$\alpha = 15^\circ \times \frac{3.14}{180^\circ} \text{ rad} = 0.262 \text{ rad}\,.$$

Successivamente, facendo uso della relazione (1.1) si calcola la lunghezza dell'arco di circonferenza, che risulta essere la seguente:

$$S = \alpha \times R = 0.262 \times 20 = 5.24 \text{ cm}\,.$$

1.4 Notazione scientifica

Dalle proprietà delle potenze, ricordiamo che, per definizione stessa di potenza, si ha

$$100 = 10 \times 10 = 10^2, \quad 1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3, \quad \ldots\ ; \tag{1.6}$$

quindi, un numero costituito dall'unità seguita da n zeri è uguale a una potenza avente per base 10 e per esponente n.

Analogamente, si ha

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}, \quad \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}, \quad \dots \; ; \tag{1.7}$$

cioè, il reciproco di un numero costituito dall'unità seguita da n zeri è eguale a una potenza avente per base 10 e per esponente $-n$.

Dalle proprietà ora richiamate, si ottiene la seguente regola.

> Qualsiasi numero, intero o decimale, può essere espresso mediante una potenza positiva o negativa di 10.

Per esempio, il numero 7562 è uguale a 7.562 moltiplicato per 1000, cioè per 10^3; potremo quindi scrivere:

$$7562 = 7.562 \times 10^3 \, .$$

> L'espressione dei numeri interi o decimali mediante potenze positive o negative di 10 prende il nome di ***notazione scientifica***.

Essa è in molti casi vantaggiosa ed è particolarmente utile nei seguenti casi.

a) Quando si vuole riportare numeri molto grandi o molto piccoli. Per esempio, invece di scrivere 816000 oppure 0.000732, è più conveniente usare una forma più concisa e significativa scrivendo 8.16×10^5 e 7.32×10^{-4}, rispettivamente. In Figura 1.3 sono riportate in una opportuna scala alcune dimensioni caratteristiche di oggetti estremamente piccoli e oggetti estremamente grandi.

b) Quando si vuole confrontare numeri di ordine di grandezza molto diverso. Per esempio, se vogliamo confrontare i numeri 6870000, 35100, 22.5 e 0.00319 converrà, ricorrendo alla notazione esponenziale, metterli sotto forma omogenea scrivendo rispettivamente 6.87×10^6, 3.51×10^4, 2.25×10 e 3.19×10^{-3}; si potrà così immediatamente stabilire che il primo dei quattro numeri è 10^2 volte maggiore del secondo, 10^5 volte più grande del terzo e 10^9 volte maggiore del quarto.

c) Quando si deve operare su numeri molto grandi o piuttosto piccoli. Supponiamo che si debba moltiplicare 4750 per 0.000268 e dividere il risultato per 350000; facendo ricorso alle potenze di 10 si procederà nel seguente modo:

$$\frac{4750 \times 0.000268}{350000} = \frac{(4.75 \times 10^3) \times (2.68 \times 10^{-4})}{3.50 \times 10^5} = \frac{4.75 \times 2.68}{3.50} \times 10^{-6} \, .$$

Il calcolo vero e proprio consisterà dunque nel moltiplicare fra loro i numeri 4.75 e 2.68 e nel dividere il risultato per 3.50: i numeri da impostare nella calcolatrice sono di poche cifre e più facilmente controllabili. Il procedimento seguito riduce di molto la possibilità di commettere errori grossolani e consente una più agevole verifica dei calcoli effettuati.

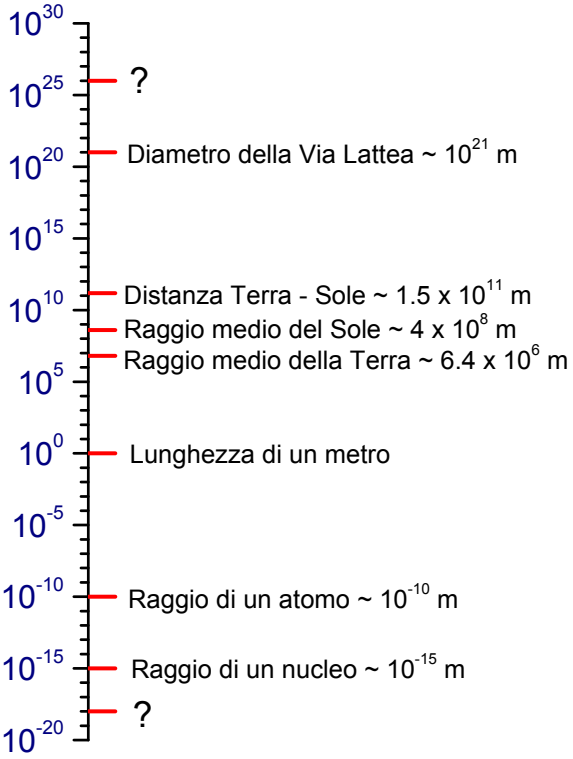


Figura 1.3: Dimensioni di oggetti estremamente piccoli ed estremamente grandi.

Esempio 1.3. Si vuole esprimere il numero 0.000842 in notazione scientifica. Poiché esso si ottiene dividendo 842 per 1000000, cioè per 10^6, avremo

$$0.000842 = \frac{842}{10^6} = 842 \times 10^{-6} .$$

Ma, a sua volta, 842 è uguale a 8.42×10^2, quindi: $0.000842 = 8.42 \times 10^2 \times 10^{-6}$; di qui, utilizzando la proprietà per cui due o più potenze aventi la stessa base, ed esponenti che siano numeri interi positivi o negativi, è uguale a una potenza avente la stessa base e per esponente la somma algebrica degli esponenti, avremo in definitiva:

$$0.000842 = 8.42 \times 10^{-4} .$$

1.5 Cifre significative

Ogni numero è espresso con un determinato numero di cifre, dove per cifra si intende uno dei simboli: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

> Il numero di tutte le cifre scritte, compreso lo 0, a partire da destra fino all'ultima diversa da zero a sinistra viene detto ***numero di cifre significative***.

L'ultima cifra a destra con cui si scrive un numero è quella che indica il *grado di precisione* con cui si ritiene di conoscere la grandezza che esso rappresenta. Per esempio, 4.3 è un numero diverso da 4.30 perché per il primo si intende che è maggiore di 4.2 e minore di 4.4 mentre per il secondo si intende che è maggiore di 4.29 e minore di 4.31. Per valutare meglio le cifre significative di un numero conviene riportare il numero in notazione scientifica.

Quando il risultato di una operazione è un numero con molte cifre, bisogna capire con quante cifre bisogna riportare il risultato finale. I valori delle grandezze fisiche vengono generalmente forniti con non più di 3 o 4 cifre significative; pertanto, è privo di significato riportare il risultato di calcoli eseguiti su tali dati con un numero maggiore di cifre significative. Occorrerà invece "tagliare" le cifre dopo la terza o la quarta approssimando, a seconda dei casi, per difetto o per eccesso applicando la seguente regola.

> Una cifra si approssima per eccesso quando è maggiore di 5 e si approssima per difetto quando è minore di 5; quando invece è esattamente uguale a 5 si può approssimare per eccesso oppure per difetto in modo tale da ottenere un valore multiplo di due.

Esempio 1.4. Si vuole determinare il volume di una sfera di raggio $R = 20.0$ cm.
Il volume della sfera è dato da

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 33510.32164 \text{ cm}^3 .$$

Coerentemente con le unità di misura fornite per il raggio, il volume andrà espresso in cm^3. Sebbene il risultato del calcolo abbia dato il valore 33510.32164 cm^3, riportare il risultato con tutte le cifre che si leggono sulla calcolatrice è privo di significato, in quanto il valore del raggio è stato fornito con sole tre cifre significative. Il risultato può ragionevolmente essere espresso con tre cifre significative, ottenendo in questo modo

$$V = 3.35 \times 10^4 \text{ cm}^3 = 33.5 \text{ litri} .$$

1.6 Esercizi

Esercizio 1.1. Calcolare la circonferenza C e l'area A di un cerchio di raggio $R = 5.1$ cm.
[$C = 32$ cm; $A = 82$ cm^2 o al più 81.7 cm^2]

Esercizio 1.2. Calcolare la superficie S e il volume V di una sfera di raggio $R = 5.0$ cm.
[$S = 314$ cm^2; $V = 523$ cm^3]

Esercizio 1.3. Due sfere hanno raggio $R_1 = 5.0$ cm e $R_2 = 10$ cm; qual è il rapporto tra il volume della seconda sfera e il volume della prima? (Eseguire il calcolo senza usare la calcolatrice!) [$2^3 = 8$]

Esercizio 1.4. Una pallina da ping-pong ha il diametro di 3.75 cm. Quante palline possono essere distribuite su di una superficie rettangolare di dimensioni $a = 37.5$ cm e $b = 52.5$ cm? [$N = 140$]

Esercizio 1.5. Si eseguano le seguenti conversioni di unità di misura, tenendo presente che 1 litro = 1 dm^3 e 1 Å (angstrom) = 10^{-10} m.

3.2×10^{-1} mm	=	...	cm	=	...	m
4.81 km	=	...	m	=	...	cm
8.0 mm	=	...	nm	=	...	Å
1.20×10^3 m^2	=	...	cm^2	=	...	mm^2
9.67×10^4 cm^3	=	...	m^3	=	...	μm
9.33 litri	=	...	m^3	=	...	cm^3

Esercizio 1.6. Calcolare la lunghezza dell'equatore terrestre in km, in metri e in miglia sapendo che il raggio della terra è di 6400 km e che 1 miglio è uguale a 1609 m.

Esercizio 1.7. Una piscina a forma di parallelepipedo retto, lunga 25 m e larga 10 m, contiene acqua fino all'altezza di 2 m. Se l'acqua si fa defluire a 80 litri al secondo, in quanto tempo (ore e minuti) si svuoterà la piscina? [1 ora e 44 minuti]

Esercizio 1.8. Una vasca a forma di parallelepipedo retto, di dimensioni 70 cm, 40 cm e 50 cm, è riempita per 2/5 del suo volume.

a. Quanti litri di acqua sono contenuti nella vasca?

b. Se il rubinetto eroga 16 litri al minuto, quanto tempo è necessario per riempire la vasca?

[a. 56 litri; b. 210 s = 3.5 min]

Esercizio 1.9. Riportare i seguenti numeri in notazione scientifica.

27800; 10301000; 0.0083; 0.0000562; 57300; 910500000; 0.00000938 .

Esercizio 1.10. Eseguire le seguenti operazioni dopo aver espresso ciascun numero in notazione scientifica e riportare il risultato con 3 cifre significative, approssimando opportunamente per eccesso o per difetto.

$$4650000 \times 973 = \dots$$

$$0.03820 \times 46200 = \dots$$

$$0.0102 \times 0.00365 \times 0.478 = \dots$$

$$\frac{53700}{1110} = \dots$$

$$\frac{895}{0.003} = \dots$$

$$\frac{433000 \times 0.0768}{123} = \dots$$

$$0.00985^2 = \dots$$

$$0.000621^5 = \dots$$

$$325^2 \times 0.063 \times \frac{0.00024^3}{23.7 \times 9680} = \dots$$

Esercizio 1.11.

a. Si calcoli il numero di secondi in un anno.

b. Se si riuscisse a contare un euro al secondo, quanti anni occorrerebbero per contare un miliardo di euro?

[a. 3.15×10^7 s; b. 31 anni e 8 mesi]

Esercizio 1.12. Un obelisco proietta sul suolo un'ombra di lunghezza $l = 14$ m. Nello stesso momento e nello stesso luogo, un'asta verticale, di altezza $h_0 = 2.0$ m, proietta sul suolo un'ombra di lunghezza $l_0 = 70$ cm. Quanto è alto l'obelisco? [$h = 40$ m]

1.7 Quesiti

Quesito 1.1. Calcolare il volume in litri di una sfera di raggio $R = 30.0$ cm.

a. $V = 11.3$ litri
b. $V = 113$ litri
c. $V = 1130$ litri
d. $V = 28.2$ litri
e. $V = 339$ litri

[b. $V = 113$ litri]

Quesito 1.2. Calcolare il volume in cm^3 di un oggetto di forma sferica di diametro $d = 200$ μm (micrometri).

a. $4.19\ \text{cm}^3$
b. $4.19 \times 10^{6}\ \text{cm}^3$
c. $4.19 \times 10^{-6}\ \text{cm}^3$
d. $4.19 \times 10^{-3}\ \text{cm}^3$
e. $4.19 \times 10^{3}\ \text{cm}^3$

[c. $4.19 \times 10^{-6}\ \text{cm}^3$]

Quesito 1.3. Dei seguenti numeri 12, 1.2, 0.120 e 0.0012 quale ha il maggiore numero di cifre significative?

a. 12
b. 1.2
c. 0.120
d. 0.0012
e. Hanno tutti lo stesso numero di cifre significative

[c. 0.120]

Capitolo 2

Gli errori nelle misure dirette

Indice

2.1 Cause di errore nelle misure dirette 20

2.1.1 Stima delle incertezza nella lettura di scale 22

2.2 Strumenti di misura 25

2.2.1 Curva di risposta 26

2.2.2 Risoluzione e sensibilità 27

2.2.3 Precisione e accuratezza 32

2.2.4 Prontezza e tempo di risposta 34

2.3 Strumenti analogici 35

2.3.1 Strumenti meccanici 35

2.3.2 Strumenti elettromeccanici 36

2.4 Strumenti digitali 40

2.5 Esercizi 44

2.6 Quesiti 46

L'acquisizione delle misure di grandezze fisiche e la valutazione della loro bontà è una fase molto importante dell'attività di laboratorio. In questo capitolo vedremo le principali caratteristiche degli strumenti di misura e metteremo in evidenza le principali cause che influenzano i valori delle grandezze fisiche durante la loro misurazione.

2.1 Cause di errore nelle misure dirette

Supponiamo di volere misurare una grandezza fisica con un idoneo strumento di misura oppure con il confronto diretto con il campione di misura (di un determinato sistema di unità di misura). Eseguiamo la misurazione una sola volta e indichiamo con x_{best} il valore determinato dal confronto diretto con il campione di misura oppure direttamente letto sulla scala dello strumento. Ci si chiede se x_{best} coincida con il "valore vero" X della grandezza; cioè, può il valore x_{best} definire quantitativamente la grandezza in esame? La risposta a questa domanda è no. Infatti, per il concorrere di numerosi fattori, di diversa natura, il valore ottenuto nella misurazione ha certamente una indeterminazione, piccola o grande che sia, così che il valore x_{best} ottenuto nella misurazione differisce sicuramente dal valore vero X della grandezza in esame. Da ciò si deduce che il valore vero di una grandezza fisica è un'astrazione matematica, come il punto materiale che si assume essere privo di dimensioni.

Il risultato di una misurazione è solamente un'approssimazione del valore della grandezza, in quanto nelle operazioni di misura intervengono inevitabilmente svariate cause che influenzano la misurazione, introducendo quindi una indeterminazione nel valore rilevato. Pertanto, il valore ottenuto nella misurazione deve essere corredato da ulteriori informazioni che indichino l'entità della sua indeterminazione. Così, qualunque grandezza fisica non può essere misurata con una precisione infinita ma può essere solo determinata con un certo grado di indeterminazione, chiamato generalmente *incertezza* o *errore*.

> Una misura è completa quando si conosce il valore della grandezza e la sua indeterminazione.

Tra i fattori che possono influenzare il risultato di una misurazione si possono ragionevolmente elencare i seguenti:

- Grado di preparazione e di esperienza dell'operatore, dal quale dipende un uso più o meno corretto dello strumento e, più in generale, un'esecuzione più o meno buona delle operazioni da compiere per effettuare la misurazione;
- Posizione dell'occhio dell'osservatore rispetto alla scala dello strumento, dalla quale può derivare il cosiddetto *errore di parallasse* (per esempio, con gli strumenti ad ago mobile a lettura diretta); per ridurre questo errore bisogna guardare la scala con l'occhio posto di fronte all'indice, come indicato nella Figura 2.1; spostando l'occhio verso l'alto si rileverà un valore più grande, spostando l'occhio verso il basso si rileverà un valore più piccolo della grandezza misurata.

- Spessore dell'indice mobile e dei tratti della graduazione dello strumento, dalla quale deriva una maggiore o minore incertezza da parte dell'operatore nel decidere il valore da assumere come risultato della lettura.
- Grado di efficienza dello strumento usato nella misurazione (usura delle parti mobili), da cui deriva un'esecuzione più o meno buona della misurazione.
- Taratura dello strumento di misura, operazione alla quale viene sottoposto ogni strumento a lettura diretta, che consiste nel regolare lo strumento in modo che le indicazioni da esso date corrispondano, con approssimazione più o meno buona, ai valori reali della grandezza misurata.

I primi due fattori sono introdotti dall'operatore, mentre gli ultimi tre sono introdotti dallo strumento di misura. I fattori elencati non si riferiscono certamente a tutte le possibili cause d'errore delle quali molte sono difficilmente individuabili, sfuggendo in pratica a ogni nostro controllo; in ogni modo, il quadro che essi forniscono, anche se largamente incompleto, è già piuttosto significativo.

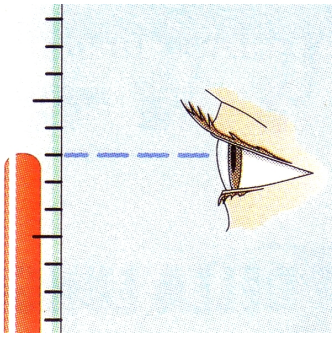


Figura 2.1: Metodo di lettura per ridurre l'errore di parallasse. Immagine adattata da: Consoli E., Rappanello P.(1996). *Laboratorio di fisica e chimica*. Paravia, Torino.

Sebbene a prima vista i fattori sopra elencati citati sembrino diversi, un esame più approfondito ci permette di stabilire che gli errori di misura possono essere considerati di due tipi.

Errori sistematici – Questo tipo di errori sono da attribuire a un errato metodo di misura o di calcolo, o all'uso di strumenti non tarati; essi si ripetono "sistematicamente" nello stesso senso ogni volta che si adotta quel metodo o si fa uso di quello strumento.[1]

Errori casuali (aleatori) – Questo tipo di errori sono, invece, errori dipendenti dalla sovrapposizione di molteplici cause differenti e variabili che, agendo in maniera del tutto casuale, ora in un senso ora nell'altro, influenzano in modo imprevedibile, e in misura più o meno grande, i risultati delle misurazioni.

[1]Gli errori strumentali, di lettura e di precisione, come vedremo più avanti, determinano un limite inferiore alla precisione con cui una misurazione può essere eseguita con tale strumento. Sebbene gli errori strumentali siano spesso considerati errori sistematici, essi costituiscono una categoria a parte.

Per trattare in modo quantitativo l'influenza degli errori nelle misurazioni delle grandezze fisiche, è necessario dare qualche definizione operativa. Definiamo quindi l'*errore assoluto* e l'*errore relativo* associati alla misura di una grandezza.

Errore assoluto – Dalle considerazioni appena fatte segue che il valore x_{best} della grandezza misurata non corrisponde al valore vero X. Lo scarto tra il valore misurato e il valore vero è detto *errore assoluto* δ_x ed è dato da

$$\delta_x = |x_{best} - X| \,. \tag{2.1}$$

Errore relativo – Per valutare l'entità di un errore può essere utile confrontarlo con una grandezza a esso omogenea. Per fare ciò, si confronta l'errore assoluto con la misura a cui esso si riferisce, calcolando il seguente rapporto

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{|x_{best}|} = \frac{|x_{best} - X|}{|x_{best}|} \,. \tag{2.2}$$

Il rapporto dato dalla relazione (2.2) e indicato con ε_x è detto *errore relativo*. Possiamo, anche, definire l'*errore relativo percentuale* come:

$$\varepsilon_{x\%} = \varepsilon_x \times 100 \,. \tag{2.3}$$

Nei paragrafi seguenti vedremo come valutare gli errori nelle misurazioni dirette e indirette di grandezze fisiche.

2.1.1 Stima delle incertezza nella lettura di scale

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che ogni misurazione di una grandezza fisica è soggetta a incertezze (errori), la cui entità caratterizza la bontà della misura. D'altra parte, non abbiamo ancora discusso come si possa realmente valutare l'entità dell'incertezza nella misura di una grandezza. Infatti, tale valutazione può essere piuttosto complicata. Fortunatamente, ci sono alcune semplici misurazioni per le quali è facile stimare ragionevolmente l'errore, usando spesso poco più che il buon senso. Vediamo qui di seguito due semplici esempi. La comprensione di questi esempi permetterà allo studente di cominciare a usare nei suoi esperimenti un'analisi degli errori, sebbene ancora elementare, la quale costituirà la base di partenza per affrontare più avanti la teoria del calcolo degli errori.

Il primo esempio è una misurazione effettuata con una scala graduata, come il righello mostrato nella Figura 2.2 o il voltmetro mostrato nella Figura 2.3. Per misurare la

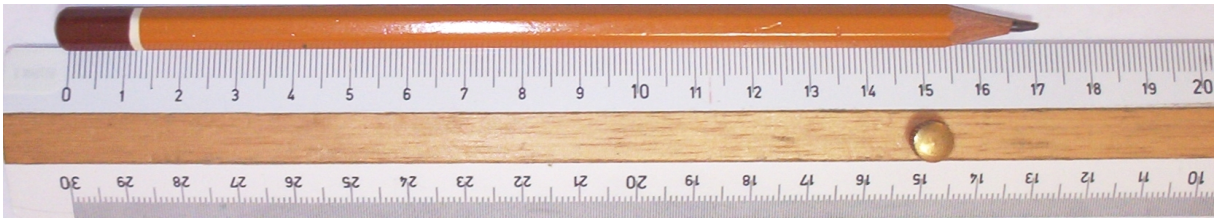


Figura 2.2: Misurazione della lunghezza di una matita con un righello.

lunghezza della matita di Figura 2.2, dobbiamo dapprima allineare l'estremità inferiore della matita con la tacca (incisione) della scala del righello che indica lo zero, quindi decidere con quale tacca corrisponde la punta della matita sulla scala del righello.

Se supponiamo che il righello sia uno strumento attendibile, allora il problema principale è di decidere dove un certo punto giace in relazione alle tacche sulla scala. (Naturalmente, se vi è qualche possibilità che il righello "non" sia attendibile, allora dovremo pure tenere conto di questo fatto). Le tacche della scala del righello di Figura 2.2 sono piuttosto vicine fra loro (un millimetro l'una dall'altra). Uno studente potrebbe decidere che la punta della matita cade al di la della tacca che indica il valore di 170 mm ma prima di quella che indica il valore di 171 mm e che una lettura migliore non è possibile. Allora, lo studente dovrebbe giungere alla conclusione che

la lunghezza della matita è compresa tra 170 mm e 171 mm.

Un criterio per determinare la migliore stima della lunghezza della matita potrebbe essere quindi quello di prendere il valore medio tra 170 mm e 171 mm

$$l_{best} = \frac{170 + 171}{2} = 170.5 \text{ mm}\,, \tag{2.4}$$

mentre per determinare la migliore stima dell'errore si può prendere la semidifferenza tra il valore massimo e il valore minimo

$$\delta_l = \frac{171 - 170}{2} = 0.5 \text{ mm}\,. \tag{2.5}$$

Si perviene quindi alla seguente conclusione per la misura della lunghezza della matita

$$l = l_{best} \pm \delta_l = (170.5 \pm 0.5) \text{ mm}\,. \tag{2.6}$$

Tuttavia, questo criterio sebbene rigoroso non è molto pratico e pertanto conviene indicare la lunghezza della matita al millimetro più vicino. Questo tipo di conclusione, cioè che la grandezza giace più vicino a una certa tacca piuttosto che a una di quelle adiacenti, è del tutto comune. Per questa ragione, si segue spesso la convenzione che l'affermazione

$l = 171$ mm, senza altra qualificazione, significhi che la lunghezza l è più vicina a 171 piuttosto che a 170 o 172, con una indeterminazione data dalla (2.5).

Pertanto, il risultato della misurazione potrà essere indicato con la seguente notazione:

$$l = (171.0 \pm 0.5)\ \text{mm}\,. \tag{2.7}$$

Nello stesso modo, un risultato come $x = 1.27$ senza nessun altra indicazione sull'entità dell'errore dovrebbe significare che x giace tra 1.265 e 1.275. Nel seguito non useremo questa convenzione; al contrario, indicheremo gli errori sempre esplicitamente, usando la notazione (2.7). In ogni caso, è importante per lo studente conoscere questa convenzione e sapere che essa si applica a qualunque numero fornito senza il valore dell'errore.[2] Spesso, un calcolo eseguito con la calcolatrice tascabile (o al computer) fornisce un risultato con molte cifre. Se uno studente copia ciecamente un numero come 123.456 dalla sua calcolatrice senza nessuna qualificazione, allora un suo lettore è autorizzato ad assumere che il numero in definitiva è corretto fino alla terza cifra decimale e cioè fino a sei cifre significative, il che è molto improbabile.

Il secondo esempio riguarda le misurazioni effettuate con uno strumento ad ago mobile, come il voltmetro di Figura 2.3, le cui incisioni sono spaziate più largamente di quelle sul righello. Qui, la maggior parte degli operatori sarebbero d'accordo di poter identificare con facilità la tacca a cui l'ago è più vicino. Tuttavia poiché la spaziatura è più grande, si può realisticamente stimare dove giace l'ago nello spazio fra due tacche consecutive. Così una conclusione ragionevole per la stima del valore di tensione fornito dallo strumento potrebbe essere:

miglior stima della tensione: 6.7 V
intervallo di valori probabili: da 6.5 fino a 6.9 V

Pertanto, il risultato della misurazione potrà essere indicato come:

$$V = (6.7 \pm 0.2)\ \text{V}\,. \tag{2.8}$$

Il procedimento di valutare la posizione dell'ago fra le incisioni di una scala graduata è chiamato *interpolazione*; questa è una tecnica importante, che certamente può essere migliorata con la pratica. Operatori diversi potrebbero non essere d'accordo con le valutazioni date nelle (2.7) e (2.8) e fornire letture diverse. Ciò nonostante, poche persone negherebbero che le (2.7) e (2.8) sono stime ragionevoli della grandezza misurata e della

[2] L'errore di una misura può essere indicato in vari modi, noi useremo la notazione (2.7).

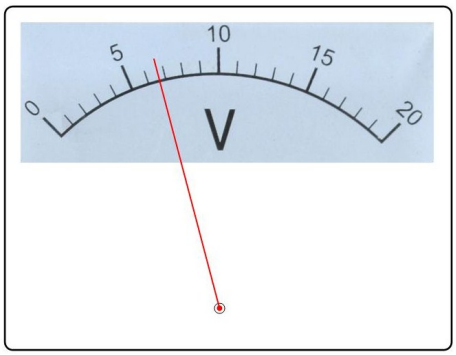


Figura 2.3: Lettura su un voltmetro.

sua probabile indeterminazione (errore). Così, constatiamo che la stima degli errori è piuttosto facile quando l'unico problema è di localizzare un punto o un ago mobile su una scala graduata.

Concludiamo questo paragrafo, definendo l'*errore di lettura* come l'indeterminazione nel valore letto che deriva, appunto, dalla lettura diretta di una scala graduata. Questo non è l'unico errore introdotto da uno strumento di misura. Nel paragrafo successivo vedremo le caratteristiche degli strumenti di misura e vedremo quindi come queste determinano l'entità dell'errore strumentale.

2.2 Strumenti di misura

Gli strumenti di misura consentono il confronto tra la grandezza in esame e la corrispondente unità di misura, fornendo una risposta quantitativa. Essi si possono classificare in due categorie:

- strumenti analogici,
- strumenti digitali.

Appartengono alla prima categoria gli strumenti meccanici (righelli, calibri, termometri a bulbo, bilance meccaniche, ecc.) e gli strumenti elettromeccanici (generalmente, strumenti ad ago mobile per misure elettriche). Il risultato di una misurazione effettuata con uno strumento analogico viene letto su una scala graduata sulla quale può scorrere un indice mobile, un nonio oppure semplicemente leggendo la misura direttamente sulla scala graduata (come nel caso di una riga graduata). Alla seconda categoria appartengono gli strumenti elettronici, quali cronometri, multimetri, ecc. Questi strumenti sono dotati di un display sul quale viene visualizzato il risultato della misurazione direttamente in cifre (*digit* in inglese significa proprio *cifra*).

In generale, uno strumento di misura consiste schematicamente di tre parti.

Rivelatore, elemento sensibile alla grandezza da misurare; per esempio, in un termometro a mercurio l'elemento sensibile è costituito dal mercurio, che interagendo con la grandezza in esame, la temperatura dell'oggetto, cambia il suo volume.

Trasduttore, elemento capace di trasferire l'informazione della grandezza da misurare, ottenuta dal rivelatore, a un'altra grandezza di più facile utilizzazione; nell'esempio del termometro a mercurio, il trasduttore è costituito dal tubo capillare.

Visualizzatore, elemento che fornisce visivamente il risultato della misura; per esempio, un indice mobile su una scala graduata oppure un display numerico.

Nella Figura 2.4 è mostrato lo schema a blocchi di un generico strumento di misura.



Figura 2.4: Schema a blocchi di un generico strumento di misura.

2.2.1 Curva di risposta

Il processo di misura di una grandezza x è legato alla variazione dello stato del rivelatore, che interagisce con la grandezza da misurare, alla trasduzione e alla successiva visualizzazione. Il trasduttore converte la variazione dello stato del rivelatore in una variazione di una grandezza fisica $R(x)$ di più facile lettura e in generale differente da x. La funzione $R(x)$ è detta *curva di risposta*. La visualizzazione può avvenire tramite un sistema analogico (per esempio una scala graduata o un indice mobile) o un sistema digitale (per esempio un display numerico).

Idealmente, uno strumento dovrebbe avere come curva di risposta una retta passante per l'origine degli assi del tipo

$$R(x) = k\ x\,, \tag{2.9}$$

dove k è una costante di dimensioni $[R]\ [x]^{-1}$ caratteristica dello strumento.

In pratica, la curva caratteristica non è mai una linea retta passante per l'origine, ma è una curva come quella mostrata nella Figura 2.5. All'aumentare di x si ha una regione detta di "sottosoglia", una regione lineare e una regione detta di "saturazione". La regione lineare delimitata dal valore massimo, detto *portata* e il valore minimo, detto

soglia, della grandezza che lo strumento è in grado di misurare individua l'*intervallo di funzionamento* o *campo di misura*. Per gli strumenti che presentano varie scale, il valore massimo che può essere rilevato dalla strumento per ciascuna scala viene denominato *fondoscala*; la portata corrisponde al valore di fondoscala maggiore ossia il massimo valore della grandezza misurabile dallo strumento in esame. Al di fuori del campo di misura, il risultato della misurazione non è affidabile e inoltre vi è la possibilità di danneggiare irrimediabilmente lo strumento di misura.

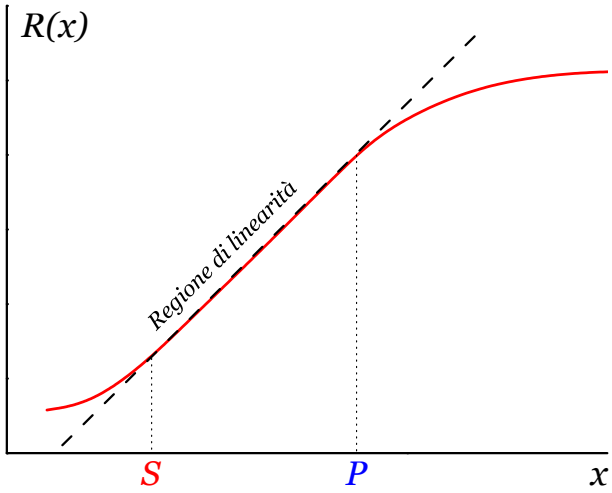


Figura 2.5: Curva di risposta caratteristica di uno strumento reale, in cui sono indicate la soglia S e la portata P.

2.2.2 Risoluzione e sensibilità

La risoluzione di uno strumento di misura è la minima variazione del valore della grandezza che può essere letta sulla scala dello strumento (per esempio, nel caso di strumenti a indice mobile, attraverso lo spostamento dell'indice). Si definisce operativamente dividendo il campo di misura (portata – soglia) per il numero di divisioni della scala graduata, dove per divisione si intende l'intervallo tra due tacche consecutive. Nel caso di un righello da 20 cm con 200 divisioni, la risoluzione è

$$r = \frac{\text{campo di misura}}{\text{numero di divisioni}} = \frac{200\ \text{mm}}{200\ \text{divisioni}} = 1\ \text{mm/divisione}\,. \tag{2.10}$$

Non bisogna confondere la risoluzione con la soglia, in quanto la soglia determina il più piccolo valore che lo strumento è in grado di misurare e, in generale, potrebbe essere maggiore della risoluzione.

La sensibilità è definita in modo quantitativo come il rapporto tra la variazione ΔR dell'indice dello strumento e la variazione Δx della grandezza oggetto della misurazione:

$$s = \frac{\Delta R}{\Delta x}\,. \tag{2.11}$$

In altre parole, la sensibilità indica di quante divisioni si sposta l'indice dello strumento quando la grandezza, oggetto della misurazione, varia di una unità. Questa grandezza è importante negli strumenti in cui è presente un trasduttore (vedi Figura 2.4). Pertanto, l'unità di misura della sensibilità è il rapporto tra l'unità di misura della deviazione dell'indice e l'unità di misura della grandezza oggetto della misurazione. Per esempio, per un voltmetro analogico ad ago mobile la sensibilità è espressa in rad/volt. In altre parole,

> la sensibilità indica di quanto varia la posizione dell'indice mobile per una variazione unitaria della grandezza oggetto della misurazione.

La più piccola variazione della grandezza di misura capace di provocare una risposta percettibile dello strumento di misura viene comunemente detta *soglia di sensibilità*.

Quando la variazione della posizione dell'indice mobile viene determinata con il numero di divisioni nella scala dello strumento, si può vedere che la sensibilità corrisponde con l'inverso della risoluzione e cioè come l'inverso della variazione della grandezza per divisione (vedi Equazione (2.10)). Sebbene dal punto di vista matematico le due grandezze siano l'una l'inverso dell'altra, dal punto di vista fisico esse hanno significato differente: la risoluzione è legata alla possibilità di potere dividere il campo di misura in un opportuno numero di divisioni; la sensibilità è una proprietà dello strumento di misura specifico ed è legata alla curva di risposta dello strumento, che a sua volta dipende dalle caratteristiche fisiche del trasduttore. Questo si capisce meglio con il seguente esempio. Nella Figura 2.6 è mostrato un termometro a liquido termometrico. Accanto alla scala dello strumento è affiancata una riga graduata con due scale: una con passo di 1 mm e l'altra con passo di 0.5 mm. Se si vuole determinare la sensibilità del termometro basta usare l'Equazione (2.11) e dividere la lunghezza del campo di misura, ΔL, espressa in mm e il campo di misura stesso, ΔT, espresso in °C:

$$s = \frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{\Delta L}{\Delta T} = \frac{94\ \text{mm}}{100\ ^\circ\text{C}} = 0.94\ \text{mm}/^\circ\text{C}\,. \tag{2.12}$$

In questo modo, si ottiene un valore di sensibilità $s = 0.94$ mm/°C che è indipendente dalla scala della riga usata nella lettura delle dimensioni del campo di misura. Questo esempio mostra pertanto che la sensibilità è una proprietà dello strumento di misura, mentre la risoluzione è una proprietà della scala.

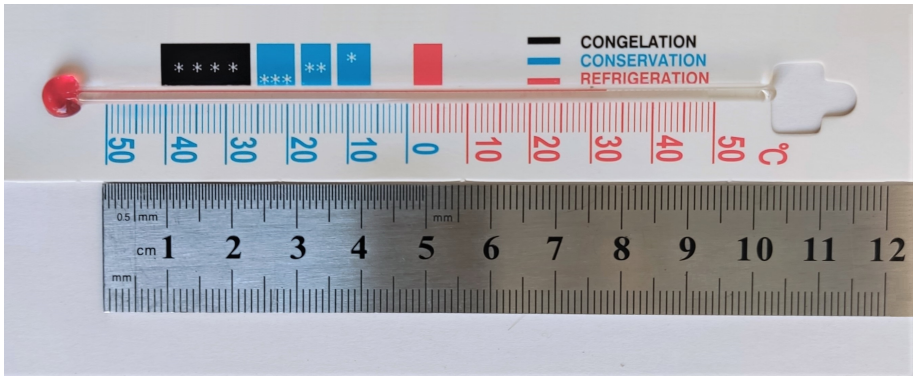


Figura 2.6: Termometro a liquido termometrico avente sensibilità di 0.94 mm/°C.

Non sempre la curva di risposta presenta una regione lineare. In questo caso, la sensibilità va definita come la derivata della funzione di risposta rispetto alla grandezza x:

$$s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} R(x)\,. \tag{2.13}$$

Questi strumenti possono avere quindi una differente sensibilità nelle varie regioni del campo di misura, come si può vedere nella Figura 2.7 dove è mostrato un igrometro, per la misura dell'umidità relativa, avente una scala non lineare.

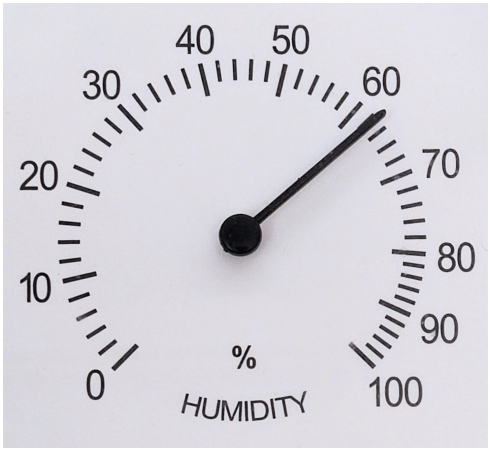


Figura 2.7: Igrometro con scala non lineare.

Per chiarire questi concetti facciamo riferimento alle bilance, cioè agli strumenti destinati alla misurazione di masse. Una bilancia analitica ha una sensibilità di 1 divisione/mg, cioè è in grado di "sentire" una variazione del carico di un milligrammo (1 mg) con lo spostamento di una divisione dell'indice sulla scala. Tale variazione non viene, invece, rilevata da una bilancia per orefici che ha una sensibilità di 1 divisione/dg, cioè che è in grado di apprezzare una variazione di un decigrammo (1 dg). Poiché 1 dg = 10^2 mg,

diremo che la bilancia analitica ha, in confronto con l'altro tipo di bilancia, una sensibilità 100 volte più grande. Possiamo dedurre quindi che fra due strumenti destinati alla misurazione di una medesima grandezza è più sensibile quello per il quale la più piccola variazione rilevabile assume il valore minore.

La sensibilità e la portata di uno strumento dipendono l'una dall'altra, nel senso che se si vuole aumentare la portata, in generale, bisogna ridurre la sensibilità. Negli strumenti analogici elettromeccanici, generalmente è possibile cambiare portata per mezzo di una manopola, per esempio un amperometro con una scala da 0 a 1 A e l'altra da 0 a 100 A, con 50 divisioni per entrambe le scale. Appare chiaro che nella prima scala, la cui portata è di 1 A, una divisione vale 0.02 A, a cui corrisponde una sensibilità di 50 divisioni/A. Nella seconda scala, di portata 100 A, una divisione vale 2 A, a cui corrisponde quindi una sensibilità di 0.5 divisioni/A. Nel secondo caso, dunque, l'aumento della portata è stato realizzato a discapito della sensibilità: a una portata 100 volte più grande fa riscontro anche una sensibilità 100 volte più piccola.

Per poter confrontare la sensibilità di due differenti strumenti atti alla misura della medesima grandezza, quando la sensibilità per i due strumenti è espressa con differenti unità di misura, si può fare ricorso al numero di divisioni della scala graduata per esprimere la sensibilità con unità di misura omogenee per entrambi gli strumenti. In questo caso, la sensibilità sarà espressa come

$$\text{N. div}/\Delta x\,. \tag{2.14}$$

Si può notare che la (2.14) corrisponde all'inverso della risoluzione dello strumento, che è espressa come

$$\Delta x/\text{div}\,. \tag{2.15}$$

Da ciò deriva che la sensibilità viene spesso scambiata con la risoluzione e l'errore di lettura viene chiamato errore di sensibilità. Tuttavia, bisogna tenere presente che le due grandezze hanno significato differente, come abbiamo già spiegato prima. Infine, vale la pena notare che nelle righe graduate, a lettura diretta sulla scala, il valore della sensibilità coincide con l'inverso del valore della risoluzione.

Esempio 2.1. Le bilance tipo *Mancur* venivano prodotte intorno al 1750 e venivano usate per pesare bestiame e pellame. Esse sono costituite da una barra di acciaio armonico

forgiato a forma di "V" oppure a forma di "C". Questo tipo di bilancia si basa sulle proprietà elastiche dell'acciaio usato nella realizzazione del meccanismo "a molla". Quindi, quando viene appeso un carico al gancio, per effetto del carico, la molla si allarga e l'indice mobile si sposta verso l'alto. La posizione dell'indice sulla scala incisa su una piastra di ottone, a forma di mezzaluna, indica il valore del carico.



Figura 2.8: Bilancia meccanica modello Mancur: (sinistra) portata di 20 kg, (destra) portata di 150 kg.

La bilancia ha due coppie di ganci, che consentono di avere due differenti portate: con la coppia di ganci posizionati alle estremità si possono misurare pesi fino a 150 kg, invece con l'altra coppia si possono misurare pesi fino a 20 kg. Le due scale hanno pertanto una differente risoluzione, che può essere facilmente calcolata. Si lascia al lettore il compito di calcolare la risoluzione delle due scale.

2.2.3 Precisione e accuratezza

Spesso si confonde la sensibilità con la precisione. Si tratta in realtà di due concetti distinti, dal momento che la precisione di uno strumento è legata all'errore relativo che il suo uso comporta; quanto più piccolo è questo errore tanto più preciso è lo strumento. Se facciamo misure ripetute nelle stesse condizioni sperimentali, in generale non otterremo sempre lo stesso valore, ma una serie di valori x_1, x_2, $\dots x_n$ che differiscono poco l'uno dall'altro, cioè le misure saranno sparpagliate attorno al un valore medio x_0. La precisione dello strumento è legata al grado di sparpagliamento delle misure attorno ad x_0, che dipende dalle caratteristiche costruttive e dal grado di efficienza dello strumento. L'intervallo entro cui cadono le misure si chiama *intervallo di dispersione*. Più ampio è l'intervallo di dispersione, meno preciso è lo strumento.

La precisione non è collegata con la sensibilità tant'è che tra due strumenti di diversa sensibilità, destinati alla misurazione di una medesima grandezza, può risultare più preciso quello meno sensibile. Per chiarire meglio questo punto, guardiamo il seguente esempio.

Esempio 2.2. Consideriamo due strumenti per la misurazione della corrente elettrica, un milliamperometro, strumento con una sensibilità di 1 div/mA (in grado di rilevare variazioni dell'intensità di corrente di 1 mA), e un amperometro, strumento con una sensibilità di 1 div/A (in grado di rilevare variazioni di 1 A). Poiché 1 mA $= 10^{-3}$ A, il primo strumento è 1000 volte più sensibile del secondo. Supponiamo che il milliamperometro, attraversato da una corrente di 10 mA, segnali un'intensità di 9 mA, e che l'amperometro, percorso da una corrente di 20 A, segnali un'intensità di 19 A. Gli scarti dei valori misurati dai valori effettivi sono, rispettivamente, in valore assoluto:

$$\delta_I = (10 - 9)\ \text{mA} = 1\ \text{mA}\,, \quad \delta_{I'} = (20 - 19)\ \text{A} = 1\ \text{A}\,. \tag{2.16}$$

Per ciascuno dei due strumenti l'errore relativo, indicando di quanto percentualmente il valore fornito dallo strumento si discosta dal valore effettivo, è espresso dal rapporto fra lo scarto assoluto e il valore effettivo; per il milliamperometro e per l'amperometro avremo dunque rispettivamente:

$$\varepsilon_{I\%} = \frac{1\ \text{mA}}{10\ \text{mA}} \times 100 = 10\%\,, \quad \varepsilon_{I'\%} = \frac{1\ \text{A}}{20\ \text{A}} \times 100 = 5\%\,. \tag{2.17}$$

L'amperometro pur essendo meno sensibile ha quindi un grado di precisione più elevato, introducendo un errore relativo del 5%, rispetto al milliamperometro che introduce un errore relativo del 10%.

Non bisogna neanche confondere la precisione di uno strumento con la capacità dello strumento di dare una misura vicina al valore vero (valore reale). La precisione indica la caratteristica per cui uno strumento fornisce la stessa misura nelle stesse condizioni sperimentali e cioè la ripetibilità; essa non ci dice nulla di quanto tale misura sia vicina al valore vero (valore reale) della grandezza misurata. La caratteristica di uno strumento di fornire misure vicine al valore vero della grandezza misurata viene detta *accuratezza*. Quindi, l'accuratezza indica di quanto il valore indicato dallo strumento si discosta dal valore vero della grandezza misurata. Pertanto, per migliorare l'accuratezza si ricorre alla taratura dello strumento; è questa un'operazione alla quale uno strumento viene sottoposto all'atto della sua messa a punto e che consiste nel regolare lo strumento (per esempio, usando campioni calibrati con misure precedenti effettuate con grande accuratezza e precisione) in modo che le indicazioni da esso date corrispondano, con approssimazione più o meno buona, ai valori reali della grandezza misurata.

Un classico esempio, molto istruttivo, che chiarisce molto bene la differenza tra precisione e accuratezza è quello del tiro al bersaglio. Se i colpi (misure) raggiungono il bersaglio vicini tra loro, vuol dire che il tiratore ha sviluppato una elevata precisione, ma naturalmente tale precisione non gli porterà un gran punteggio se i tiri sono tutti lontani dal centro del bersaglio (valore vero)! Nella Figura 2.9 sono illustrati tutti i quattro casi possibili. I due tipi di errori introdotti dallo strumento sono generalmente accorpati in un unico parametro detto semplicemente *errore di precisione*, che tiene conto sia della precisione sia dell'accuratezza.

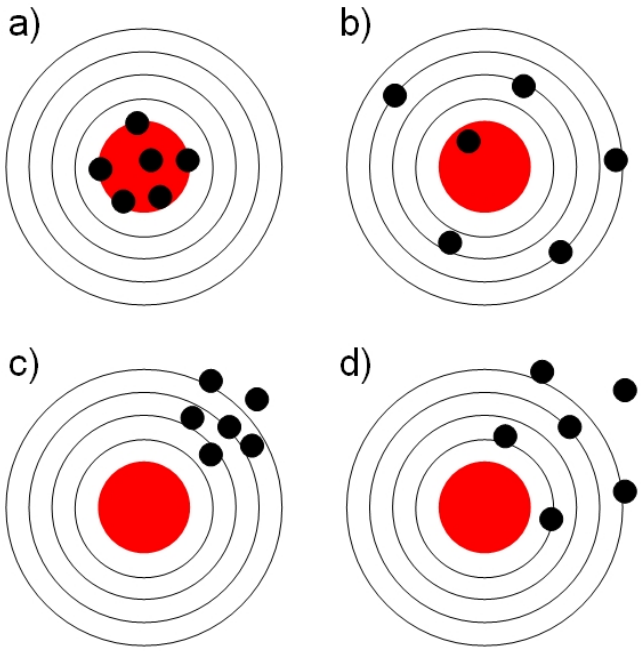


Figura 2.9: Illustrazione della differenza tra precisione e accuratezza: a) strumento preciso e accurato; b) strumento poco preciso e accurato; c) strumento preciso e poco accurato; d) strumento poco preciso e poco accurato.

2.2.4 Prontezza e tempo di risposta

La *prontezza* di uno strumento di misura è data dalla rapidità con cui lo strumento è in grado di misurare la grandezza in esame o di seguirne le variazioni. In altre parole, la prontezza è uguale all'inverso del tempo che lo strumento impiega a fornire il risultato della misura, il cosiddetto *tempo di risposta*. La prontezza assume particolare importanza per strumenti, come termometri, bilance e strumenti di misura elettromeccanici (galvanometri, amperometri, voltmetri, ecc.), nei quali l'indice compie delle oscillazioni prima di arrestarsi sulla posizione di equilibrio. Questi strumenti richiedono quindi un intervallo di tempo più o meno lungo perché possa attuarsi la lettura. Conviene naturalmente che tale intervallo sia il più piccolo possibile.[3]

La prontezza assume notevole importanza per i termometri a liquido termometrico, dei quali fa parte il termometro clinico mostrato nella Figura 2.10. Se un termometro a liquido termometrico, in equilibrio termico con un ambiente, viene portato in un ambiente a temperatura diversa, occorrono intervalli di tempo dell'ordine dei minuti perché lo

[3]Il costruttore dello strumento opera in modo da ridurre il numero delle oscillazioni e la durata di ciascuna oscillazione: realizza la prima condizione ricorrendo a opportuni sistemi di smorzamento, la seconda condizione alleggerendo le parti mobili dello strumento.

strumento si porti in equilibrio termico con il secondo ambiente. A parità di altre condizioni, l'intervallo di tempo richiesto è tanto più breve, e il termometro tanto più pronto, quanto minore è la massa di liquido termometrico presente nello strumento, cioè quanto più piccole sono le dimensioni del bulbo in cui il liquido è contenuto.

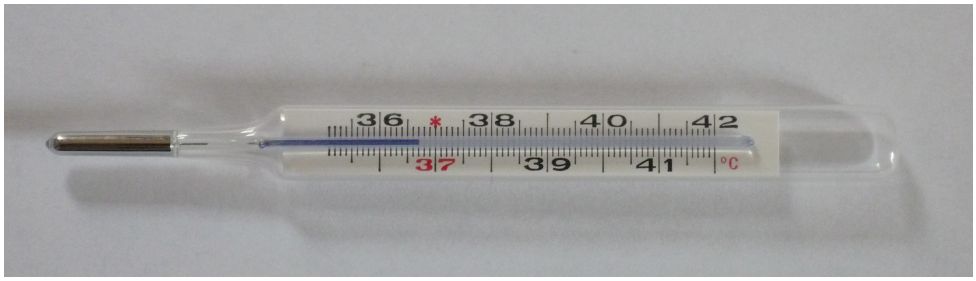


Figura 2.10: Fotografia di un tipico termometro clinico.

Nei paragrafi seguenti daremo una descrizione più dettagliata degli strumenti analogici (meccanici ed elettromeccanici) e digitali e del principio di funzionamento su cui essi si basano.

2.3 Strumenti analogici

2.3.1 Strumenti meccanici

Gli strumenti meccanici più diffusi sono le righe graduate e i metri a nastro. Anche per questi strumenti viene indicata dal costruttore la classe di precisione, in accordo con la Direttiva 2004/22/CE dell'Unione europea. La Direttiva stabilisce che il valore dell'errore, espresso in millimetri, è dato dalla seguente espressione

$$\delta_x = \pm \left(a + \frac{b}{1000} L \right) , \tag{2.18}$$

dove a e b sono dei parametri relativi alla classe di precisione dello strumento riportati nella Tabella 2.1 ed L è la misura della lunghezza espressa in millimetri; per determinare l'errore massimo, nell'equazione (2.18) il valore di L deve essere sostituito con la portata.

Nello strumento deve essere riportata l'indicazione della classe di precisione. Nella Figura 2.11 si possono vedere due diversi strumenti con differente classe di precisione. Per esempio, calcoliamo l'errore introdotto da un metro a nastro di classe II in una misura di 80 cm

$$\delta_x = \left(a + \frac{b}{1000} \times L \right) = \left(0.3 + \frac{0.2}{1000} \times 800 \right) \approx 0.5 \text{ mm} .$$

Tabella 2.1: Valori dei parametri a e b nelle differenti classi di precisione previsti dalla Direttiva 2004/22/CE per gli strumenti per misure lineari.

Classe di precisione	a (mm)	b
I	0.1	0.1
II	0.3	0.2
III	0.6	0.4

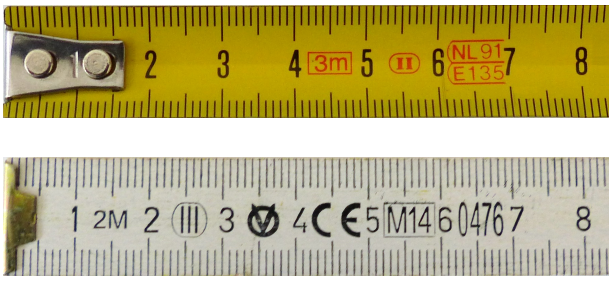


Figura 2.11: Metro a nastro (sopra) con indicazione della classe di precisione II; (sotto) metro ripiegabile (o da carpentiere) con indicazione della classe di precisione III.

2.3.2 Strumenti elettromeccanici

Negli strumenti elettromeccanici, appartenenti alla categoria degli strumenti analogici, il risultato della misurazione è fornito dalla lettura della deviazione di un indice che si muove su una scala graduata. La deviazione dell'indice è una funzione continua della grandezza misurata. Questi strumenti trasformano la grandezza da misurarsi in una corrente continua, proporzionale alla grandezza misurata, che va ad alimentare uno strumento magneto-elettrico ad ago mobile, la deflessione dell'indice di quest'ultimo fornisce la misura della grandezza. L'impiego più comune è come voltmetro o amperometro, anche se attualmente tendono a essere sostituiti dagli strumenti digitali (che descriveremo nel paragrafo successivo). Lo schema a blocchi di uno strumento elettromeccanico è riportato nella Figura 2.12.

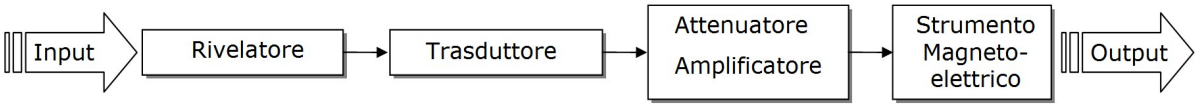


Figura 2.12: Schema a blocchi di uno strumento analogico elettromeccanico.

Le specifiche più importanti che caratterizzano uno strumento elettromeccanico sono le seguenti.

Sensibilità, che rappresenta il rapporto tra la variazione della deviazione indicata dall'ago mobile dello strumento e la corrispondente variazione della grandezza misurata.

Campo di misura, che è dato dall'intervallo tra la portata e la soglia. Al di fuori di questo intervallo vi è la possibilità di danneggiare lo strumento e, in ogni caso, il risultato della misurazione non è affidabile.

Prontezza, che è l'inverso del tempo impiegato dallo strumento per indicare il valore della grandezza misurata entro i suoi limiti di accuratezza.

Errore di precisione, che indica di quanto il valore visualizzato dallo strumento si discosta dal valore reale della grandezza misurata; essa è determinato dalle caratteristiche costruttive e dal grado di efficienza dello strumento. Normalmente, i costruttori forniscono il valore dell'indice della classe di precisione, che definisce l'errore di precisione dello strumento; esso costituisce il limite superiore dell'errore assoluto δ_{max} rapportato al valore di fondoscala[4] x_{fs}. Questo valore si ottiene calcolando il rapporto fra l'errore assoluto δ_{max} e il valore di fondoscala x_{fs} dello strumento, moltiplicato per 100, ovvero:

$$\varepsilon_{fs\%} = \frac{\delta_{max}}{x_{fs}} \times 100\,. \tag{2.19}$$

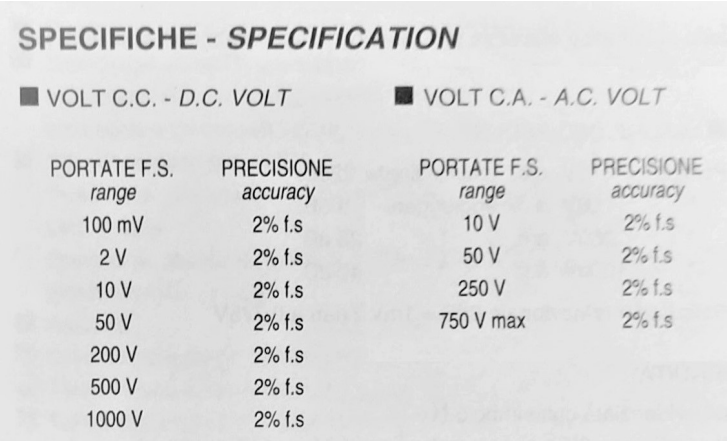
L'errore percentuale dato dalla (2.19) è detto *classe di precisione* dello strumento. L'errore assoluto massimo si determina quindi moltiplicando l'errore percentuale dell'indicazione di fondoscala per il valore di fondoscala.

Le norme del Comitato Elettrotecnico Italiano (Norme CEI) prevedono varie classi di precisione degli strumenti per misure elettriche. Normalmente, i vari strumenti vengono raggruppati come segue:

- classe di precisione minore di 0.1 per strumenti campione;
- classe di precisione compresa tra 0.1 e 1 per strumenti scientifici di controllo e di laboratorio;
- classe di precisione maggiore di 1 per strumenti di uso industriale.

Nella Figura 2.13 sono mostrate le specifiche di un multimetro analogico commerciale riportate dal manuale d'uso.

[4]Per gli strumenti che presentano varie scale, l'errore di precisione è riferito al valore di fondoscala per ciascuna scala; la portata invece è il massimo valore misurabile dallo strumento e corrisponde al valore di fondoscala maggiore.



SPECIFICHE - *SPECIFICATION*

■ VOLT C.C. - *D.C. VOLT*

PORTATE F.S. *range*	PRECISIONE *accuracy*
100 mV	2% f.s
2 V	2% f.s
10 V	2% f.s
50 V	2% f.s
200 V	2% f.s
500 V	2% f.s
1000 V	2% f.s

■ VOLT C.A. - *A.C. VOLT*

PORTATE F.S. *range*	PRECISIONE *accuracy*
10 V	2% f.s
50 V	2% f.s
250 V	2% f.s
750 V max	2% f.s

Figura 2.13: Specifiche di un multimetro analogico commerciale.

Poiché la classe di precisione dello strumento è indicata dal costruttore, è possibile calcolare, mediante la relazione (2.19), il valore dell'errore assoluto di una misurazione effettuata con un determinato fondoscala. Per esempio, per un amperometro di classe 2.5 e fondoscala (portata) di 250 mA, come quello mostrato nella Figura 2.14, il massimo errore assoluto garantito dal costruttore su tutto il campo nominale della misura si determina nel seguente modo:

$$\delta_{x_{fs}} = \frac{\varepsilon_{xfs\%}}{100} \times x_{fs}\,. \tag{2.20}$$

Pertanto, l'errore sulla misura della corrente è:

$$\delta_{I_{fs}} = \frac{\varepsilon_{fs\%}}{100} \times x_{fs} = \frac{2.5}{100} \times 250 \text{ mA} = 6.25 \approx 6 \text{ mA}\,.$$

È da notare che negli strumenti a zero centrale si deve considerare come portata la somma delle portate dalle due parti dello zero.



Figura 2.14: Amperometro commerciale con indicazione della classe di precisione.

Esempio 2.3. Un voltmetro con classe di precisione 0.2 è caratterizzato da un errore assoluto massimo dello 0.2% del valore di fondoscala; se impiegato con una scala di 300 V, le misure saranno affette da un errore assoluto massimo dato da

$$\delta_V = \frac{0.2}{100} \times 300 = 0.6 \text{ V}\,.$$

Esempio 2.4. Un amperometro ha una portata di 5 A e una scala con 100 divisioni. Si è letto 45.4 divisioni, con una approssimazione presunta di mezza divisione (cioè 0.5). Se la classe dello strumento è 0.2, qual è l'errore assoluto nel risultato della misurazione?

Il valore della corrente misurato si ottiene moltiplicando le divisioni lette per il valore di una divisione (risoluzione)

$$I = 45.4 \times \frac{5}{100} = 2.27 \text{ A}\,;$$

tale valore va opportunamente corretto. A questo scopo si devono considerare separatamente l'errore di precisione, dovuto allo strumento impiegato, e l'errore di lettura introdotto nella valutazione della frazione di divisione (detto anche *errore di interpolazione*). L'errore dovuto allo strumento si può calcolare con la formula (2.20):

$$\delta_{I_{fs}} = \frac{0.2}{100} \times 5 = 0.01 \text{ A}\,;$$

l'errore dovuto alla lettura invece è dato dal prodotto di mezza divisione per la risoluzione dello strumento

$$\delta_{I_L} = 0.5 \times \frac{5}{100} = 0.025 \text{ A}\,;$$

L'errore assoluto massimo totale, quindi, è ragionevolmente dato dalla somma diretta dei due contributi

$$\delta_I = \delta I_{fs} + \delta_{I_L} = 0.01 + 0.025 \approx 0.04 \text{ A}\,.$$

Pertanto, la migliore stima della misura è

$$I = (2.27 \pm 0.04) \text{ A}\,.$$

Infine, l'errore relativo è $\varepsilon_I = 0.04/2.27 = 0.015$, a cui corrisponde un errore relativo percentuale $\varepsilon_{I\%} = 1.5\%$.

È importante osservare che, l'errore assoluto strumentale dipende dalla classe di precisione ed è costante per tutto il campo di misura; quindi, l'errore relativo in una misura è tanto più grande quanto più piccolo è il valore misurato rispetto alla scala (portata). Per questo motivo è opportuno utilizzare strumenti aventi una portata tale da collocare il valore misurato oltre i due terzi della portata stessa. Abbiamo ritenuto che l'incertezza nella misura (errore di precisione più errore di lettura) sia determinata unicamente dall'errore proprio dello strumento, il cui segno è per sua natura ignoto. Questo modo di procedere è accettabile solo se si può escludere la presenza di altri errori (sistematici o accidentali), oppure se gli altri eventuali errori sono di entità trascurabile. Infine, il valore misurato deve essere approssimato al numero di cifre significative tale che la cifra meno significativa corrisponda con l'errore assoluto. Pertanto, nell'Esempio 2.4, la corrente misurata sarà $I = (2.27 \pm 0.04)$ A. In tale valore, le prime tre cifre sono significative mentre eventuali cifre successive sarebbero prive di significato.

2.4 Strumenti digitali

Gli strumenti digitali offrono molteplici vantaggi rispetto ai corrispondenti strumenti analogici: permettono una maggiore facilità di lettura, poiché l'operazione di interpolazione entro la divisione della scala non è necessaria, e inoltre, non avendo parti meccaniche in movimento, permettono di avere una maggiore precisione e una maggiore risoluzione.

Lo schema a blocchi di uno strumento digitale è riportato nella Figura 2.15. La grandezza da misurare viene convertita dal trasduttore in un segnale di tensione elettrica continua V che, a sua volta, viene convertito in un segnale digitale binario (successione di bit), inviato infine alla sezione di decodifica e visualizzazione, che avviene sotto forma numerica. Il convertitore analogico/digitale trasforma una tensione elettrica variabile in un certo intervallo di valori in un numero intero binario compreso in genere tra 0 e $2^N - 1$, essendo N il numero di bit del convertitore (di solito da 8 a 16). Il tutto è gestito da un controllore, di solito costituito da un microprocessore. L'indicazione digitale può essere visualizzata con display a cristalli liquidi, a sette segmenti, a punti luminosi, ecc.
Le specifiche tecniche più importanti che caratterizzano uno strumento digitale, oltre alla sensibilità, portata e prontezza, sono le seguenti.

Risoluzione, che indica il peso dell'ultima cifra del visualizzatore nella portata più bassa e definisce l'errore di lettura (di solito, una unità sulla cifra meno significativa). Per esempio, per un voltmetro di portata minima 100 mV con display a 4 cifre, l'ultima cifra a destra indica i centesimi di millivolt (mV), quindi la risoluzione di

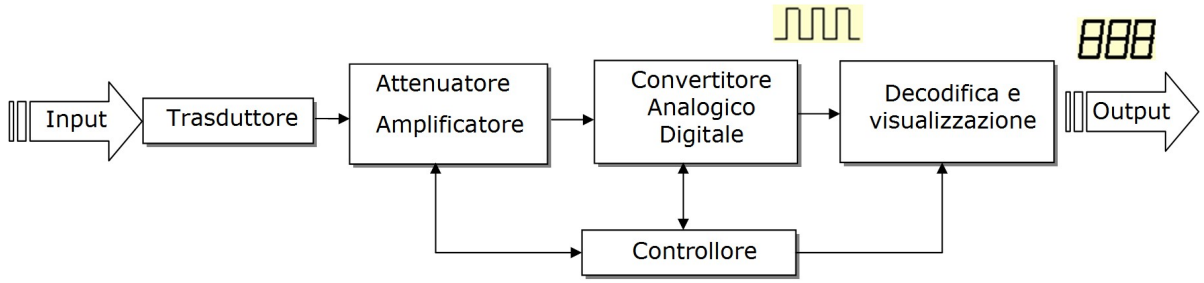


Figura 2.15: Schema a blocchi di uno strumento digitale. Per semplificare lo schema, il rivelatore è stato omesso.

tale strumento è di 10 μV. Per capire meglio questo concetto, bisogna tenere presente che il valore massimo visualizzato dallo strumento è 0.1 V, ovvero 9999×10^{-5} V, da cui risulta immediatamente che il valore della risoluzione è 1×10^{-5} V $= 10$ μV. A volte la risoluzione è indicata in parti per milione (p.p.m.), nell'esempio fatto si ha una risoluzione di 10 p.p.m.

Errore di precisione, che definisce una componente dell'errore strumentale e può essere espresso nei seguenti modi:

(a) errore relativo percentuale sul valore di fondoscala, $\varepsilon_{fs\%}$, del tutto analogo alla classe di precisione degli strumenti analogici

$$\varepsilon_{fs\%} = \frac{\delta_{max}}{x_{fs}} \times 100\,, \tag{2.21}$$

dove δ_{max} è l'errore assoluto massimo e x_{fs} è il valore di fondoscala (portata) dello strumento;

(b) errore relativo percentuale sul valore misurato, $\varepsilon_{vm\%}$;

(c) numero di digit, ovvero numero di unità sulla cifra meno significativa.

In generale, il costruttore per indicare l'errore di precisione dello strumento fornisce almeno due dei tre valori sopra definiti, nella seguente forma:

$$\text{accuracy} = \pm\left(\varepsilon_{fs\%} + \varepsilon_{vm\%}\right); \tag{2.22}$$

$$\text{accuracy} = \pm\left(\varepsilon_{fs\%} + N \text{ digit}\right); \tag{2.23}$$

$$\text{accuracy} = \pm\left(\varepsilon_{vm\%} + N \text{ digit}\right). \tag{2.24}$$

Nella Tabella 2.2 sono riportate le caratteristiche di un calibro digitale centesimale. Nella Figura 2.16 sono mostrate le caratteristiche di una bilancia digitale e nella Tabella 2.3 sono riportate le specifiche tecniche di un multimetro digitale.

Tabella 2.2: Caratteristiche tecniche di un calibro digitale centesimale.

Measurement unit :	mm
Measuring range :	0 – 150 mm
Resolution :	0.01 mm
Accuracy (0 – 100 mm) :	± 0.02 mm
Accuracy (100 – 150 mm) :	± 0.03 mm
Maximum measuring speed :	1.5 m/s
Measuring system :	liner capacitive measuring system
Display :	LCD display
Operating temperature :	from +5°C to +40°C
Influence of humidity :	from 0% to 80% relative humidity irrelevant

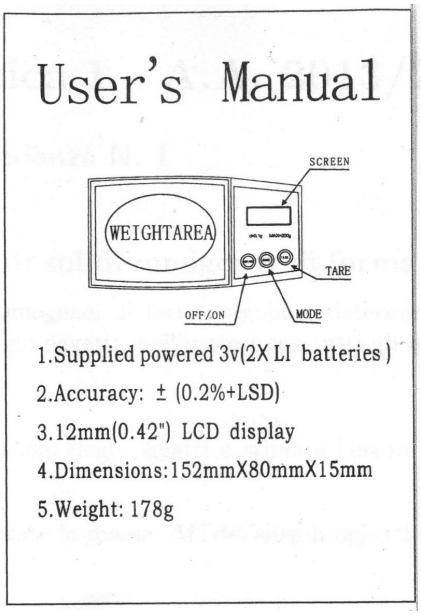


Figura 2.16: Caratteristiche tecniche di una bilancia digitale commerciale.

Tabella 2.3: Specifiche tecniche di un multimetro digitale (la virgola indica il separatore decimale). Questo strumento introduce un differente errore di precisione per le differenti tipologie di misurazioni che si possono effettuare con tale strumento.

Funzione	Portata	Precisione
$\overline{\overline{\text{V}}}$	3,200 V, 32,00 V, 320,0 V 600 V	±(0,3%+1) ±(0,4%+1)
$\text{m}\overline{\overline{\text{V}}}$	320,0 mV	±(0,3%+1)
$\tilde{\text{V}}$ (da 45 a 500 Hz per la portata 3,2V. Per le altre portate: da 45 a 1 kHz)	3,200 V, 32,00 V, 320,0 V, 600 V	±(2%+2) ±(2%+2)
Ω	320,0 Ω 3200 Ω, 32,00 kΩ, 320,0 kΩ, 3,200 MΩ 32,00 MΩ	±(0,5%+2) ±(0,5%+1) ±(0,5%+1) ±(2%+1)
→+)))	2,0 V	±(1% tipica)

Esempio 2.5. Effettuiamo la misura di una corrente continua con un amperometro digitale con display a 3 cifre, portata $P_A = 1$ A e precisione ± (0.1% del valore misurato + 1 digit). Se la misura è stata di 496 mA, l'errore di precisione risulterà pari a:

$$\delta_I = \frac{0.1}{100} \times 496 \text{ mA} + 1 \text{ mA} = 1.5 \text{ mA}\,,$$

dove il valore di 1 mA che compare come secondo termine per il calcolo dell'errore assoluto è il contributo di 1 digit per l'errore di risoluzione, ovvero, avendo 3 cifre e quindi 1000 punti di misura, un errore pari a:

$$\frac{1}{1000} \times 1000 \text{ mA} = 1 \text{ mA}\,.$$

Quindi, la migliore stima della corrente misurata è $I = (496.0 \pm 1.5)$ mA, in cui l'errore è ottenuto dalla somma diretta dell'errore di precisione (0.1% del valore misurato) e l'errore di lettura (1 digit).

Il numero di cifre col quale viene fornita l'indicazione numerica dipende dalla precisione dello strumento, essendo inutile rappresentare cifre non significative (delle quali non può essere assicurata la fondatezza). Per esempio, uno strumento col visualizzatore a cinque cifre e quindi con 100000 punti di misura (da 0 a 99999) ha una risoluzione pari a $1/99999 = 10^{-5}$. Tuttavia, per rendere massima la risoluzione, spesso il numero visualizzato comprende una cifra in più rispetto alla precisione dello strumento. Questa ulteriore cifra può assumere solamente il valore 1 o 2 e per questo motivo si dice che lo strumento ha $5 + \frac{1}{2}$ cifre.

Abbiamo appena visto che gli strumenti con indicazione digitale, fornendo direttamente in cifre il valore della grandezza, consentono una più facile e più rapida lettura del valore misurato, rispetto agli strumenti analogici. Alcuni strumenti hanno un numero elevato di cifre; questo permette di avere valori molti precisi della grandezza misurata. Tuttavia, a causa delle condizioni sperimentali, le cifre meno significative (quelle più a destra) non assumono un valore fisso: cambiano continuamente; pertanto, esse non hanno alcun significato. In questo caso, l'errore che si può associare alla misura può essere determinato dal valore di 1 digit sulla cifra più a destra che assume stabilmente un determinato valore.

Concludiamo questo paragrafo con alcuni consigli pratici per l'uso corretto degli strumenti di misura. Quando si effettua una misurazione, senza avere una precisa idea del valore della grandezza che si sta andando a misurare, è consigliabile iniziare dalla scala più alta dello strumento e quindi, se è necessario, si scenderà fino a trovare la scala in cui si può realizzare agevolmente la misura desiderata. In particolare, si deve evitare che la lettura venga effettuata all'inizio della scala, per evitare di introdurre errori di lettura troppo elevati. Infine, prima di realizzare una misurazione è opportuno pensare quale sia il metodo migliore per eseguire tale misurazione per evitare di danneggiare irrimediabilmente lo strumento.

2.5 Esercizi

Esercizio 2.1. La misura dell'altezza di un vano-porta è 210 cm ed è compresa tra 205 cm e 215 cm. Riscrivere questo risultato nella forma $x_{best} \pm \delta_x$. [(210 ± 5) cm]

Esercizio 2.2. Calcolare l'errore relativo nella misura del vano-porta descritto nell'Esercizio 2.1. [2.5%]

Esercizio 2.3. Un termometro analogico ha la graduazione in gradi centigradi e in decimi di grado. Qual è la sua risoluzione? [0.1°C/divisione]

Esercizio 2.4. Un termometro analogico ha la graduazione in gradi centigradi e in decimi di grado. Quant'è l'errore di lettura? [0.05°C]

Esercizio 2.5. L'amperometro analogico mostrato nella Figura 2.17 ha una classe di precisione 2.0. Quant'è l'errore strumentale su una misura di 15 A ?



Figura 2.17: Amperometro, classe di precisione 2.0 (Fonte heschen.com).

$[I = (15.0 \pm 1.0)\ \text{A}]$

Esercizio 2.6. Un operatore effettua una misurazione con una bilancia digitale a tre cifre, ottenendo $m = 355$ g. Sapendo che la bilancia ha un errore di precisione dello 0.5% sul valore misurato, determinare l'errore strumentale e riportare correttamente la misura ottenuta. $[m = (355 \pm 3)\ \text{g}]$

2.6 Quesiti

Quesito 2.1. Quant'è la velocità indicata dal tachimetro mostrato nella Figura 2.18?



Figura 2.18: Tachimetro per misure di velocità.

a. (10 ± 5) km/h
b. (10.0 ± 2.5) km/h
c. (8.0 ± 2) km/h
d. (8 ± 2.0) km/h
e. (8 ± 2) km/h

[e. (8 ± 2) km/h]

Capitolo 3

Gli errori nelle misure indirette: propagazione degli errori

Indice

3.1 Errori nelle misure dirette 48

3.2 Errori nelle misure indirette 50

3.2.1 Propagazione degli errori nelle somme e nelle differenze 50

3.2.2 Propagazione degli errori nei prodotti e quozienti 52

3.3 Errori indipendenti e casuali 57

3.4 Esercizi 62

3.5 Quesiti 63

La maggior parte delle grandezze fisiche, di solito, non possono essere misurate effettuando una singola misurazione, ma vengono invece determinate in due passi distinti. Prima, occorre effettuare le misurazioni dirette delle grandezze, x, y, ... , dalle quali la grandezza che ci interessa può essere determinata. Successivamente, utilizzando i valori misurati di x, y, ... , si calcola il valore della grandezza in esame. Per esempio, per trovare il perimetro e l'area di un rettangolo, di fatto, si misurano la sua lunghezza l e la sua altezza h; quindi, si calcolano il perimetro P come $P = 2l + 2h$ e l'area A come $A = l \times h$. Analogamente, il modo più ovvio di trovare la velocità media $\overline{v}$ di un corpo in moto è quello di misurare la distanza percorsa Δs e il tempo Δt impiegato a percorrere tale distanza e, quindi, di calcolare $\overline{v}$ come:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \,. \tag{3.1}$$

Si possono pensare altri esempi; infatti, si può facilmente vedere che per misurare la maggior parte delle grandezze di un certo interesse bisogna seguire questi due distinti passi: misurazione diretta seguita da calcolo. In questo caso, anche la stima dell'errore necessita di due passi. Dapprima, occorre stimare gli errori nelle grandezze che sono misurate direttamente, quindi trovare come questi errori si "propagano" attraverso i calcoli per produrre un errore nel risultato finale.

In questo capitolo, discuteremo della propagazione degli errori nelle misurazioni indirette. Tuttavia, prima di affrontare l'argomento della propagazione degli errori, richiamiamo brevemente gli argomenti trattati nei capitoli precedenti riguardanti la stima degli errori nelle grandezze misurate direttamente. Quindi, affronteremo il problema della propagazione degli errori nelle misurazioni indirette e troveremo due semplici regole che ci consentiranno di affrontare semplici problemi di propagazione degli errori. La regola generale, che comprende tutti i casi di propagazione degli errori, sarà trovata nel Capitolo 4.

3.1 Errori nelle misure dirette

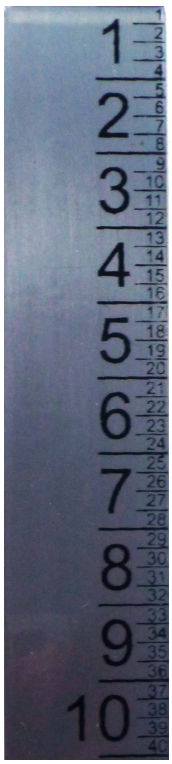


Figura 3.1: Riga da sarto graduata in quarti di centimetro.

Quasi tutte le misurazioni dirette comportano la lettura di una scala (per esempio, su un righello, un orologio o un voltmetro) o di un display digitale (per esempio, su un orologio digitale o un multimetro). Alcuni dei problemi sulla lettura di una scala sono stati discussi nel Capitolo 2. Talvolta, le principali sorgenti di errore sono la lettura della scala e la necessità di interpolare tra le incisioni della stessa. In tali situazioni, una stima ragionevole dell'errore è facile da fare. Per esempio, se si deve misurare la lunghezza l di un segmento con un righello graduato in millimetri, si può ragionevolmente decidere che la lunghezza può essere letta al millimetro più vicino ma non meglio. Quindi, l'errore δ_l dovrebbe essere $\delta_l = 0.5$ mm. Se le incisioni della scala sono più distanti (come nel caso di una riga da sarto, come quella mostrata in Figura 3.1, graduata in quarti di centimetro), si può ragionevolmente decidere, per esempio, di leggere a metà di una divisione. In ogni caso, gli errori associati con la lettura di una scala possono ovviamente essere stimati semplicemente e realisticamente.

Sfortunatamente, ci sono frequentemente altre sorgenti di errore che sono molto più importanti delle difficoltà di lettura di una

scala. Nel misurare la distanza fra due punti, il problema principale può essere quello di decidere dove questi due punti sono realmente. Se si guarda soltanto alle scale e si trascurano altre sorgenti di errore, si può sottostimare l'errore totale molto malamente. Infatti, l'errore più comune che lo studente può commettere all'inizio è di trascurare alcune sorgenti di errore e quindi di sottostimare gli errori, spesso di un fattore 10 o più. Comunque, è anche importante non sovrastimare gli errori. Uno studente che decida di mettersi al sicuro associando errori esagerati a tutte le misure può evitare imbarazzanti inconsistenze, ma le sue misure possono non essere di alcuna utilità. Chiaramente, l'ideale è trovare tutte le possibili cause di errore e stimare i loro effetti accuratamente.

Leggere un display digitale è più facile che leggere una scala graduata. A meno che lo strumento non sia difettoso, esso mostrerà soltanto cifre significative. Per esempio, se un cronometro digitale, che mostra i secondi con due posti decimali, segna un tempo t di 8.03 s, allora l'errore nella lettura deve essere di una unità sull'ultima cifra (1 digit); pertanto, il risultato della lettura può essere

$$t = (8.03 \pm 0.01)\ \mathrm{s}\,;$$

oppure, a seconda della precisione del cronometro, l'errore può essere di 2 digit; cioè, 8.03 s può significare

$$t = (8.03 \pm 0.02)\ \mathrm{s}\,;$$

È importante notare che il display digitale può dare una fuorviante impressione di accuratezza. Per esempio, si può usare un cronometro digitale per misurare il tempo di caduta di un corpo. Se il cronometro presenta tre posti decimali e mostra un tempo t di 8.036 s, allora apparentemente il tempo di caduta è

$$t = (8.036 \pm 0.001)\ \mathrm{s}\,.$$

Comunque, lo studente accurato che ripeta l'esperimento sotto condizioni il più identiche possibili può trovare che la seconda misura è

$$t = (8.113 \pm 0.001)\ \mathrm{s}\,.$$

Una possibile spiegazione di questa discrepanza è che gli errori nella procedura di partenza variano le condizioni iniziali e quindi il tempo di caduta misurato. In ogni caso, è chiaro che l'accuratezza proclamata è ridicolmente troppo buona. Giudicando dalle due misurazioni fatte finora, un risultato più realistico della misurazione del tempo di caduta del corpo dovrebbe essere il valore medio, mentre l'errore assoluto dovrebbe essere la semidifferenza

delle due misure:

$$t = \frac{8.036 + 8.113}{2} \pm \frac{|8.036 - 8.113|}{2} = (8.07 \pm 0.05)\ \mathrm{s}\,;$$

Questo esempio ci porta a considerare che ogniqualvolta una misurazione può essere ripetuta, ciò dovrebbe solitamente essere fatto parecchie volte. Lo sparpagliamento risultante dei valori è spesso un buon indice degli errori e la media dei valori è spesso certamente più attendibile di qualunque misura singola. Questo argomento verrà meglio trattato nei prossimi capitoli.

3.2 Errori nelle misure indirette

3.2.1 Propagazione degli errori nelle somme e nelle differenze

Supponiamo di aver misurato una o più grandezze, x, y, ... , con gli errori corrispondenti, δ_x, δ_y, ... , e che ora desideriamo utilizzare i valori misurati di x, y, ... , per calcolare la grandezza di reale interesse q. Il calcolo di q è di solito semplice; il problema è come gli errori δ_x, δ_y, ... , si propaghino attraverso il calcolo e portino a un errore δ_q nel valore finale di q. Per valutare l'errore nella somma o nella differenza, dobbiamo soltanto decidere sui più grandi e più piccoli valori probabili che la grandezza q può assumere. Il più grande e il più piccolo dei valori probabili di x sono, rispettivamente, $x_{best} + \delta_x$ e $x_{best} - \delta_x$, e quelli di y sono, rispettivamente, $y_{best} + \delta_y$ e $y_{best} - \delta_y$. Quindi, il più grande valore probabile di $q = x + y$ è

$$q_{max} = x_{best} + y_{best} + (\delta_x + \delta_y)$$

e il più piccolo valore probabile è

$$q_{min} = x_{best} + y_{best} - (\delta_x + \delta_y)\,.$$

Così, la miglior stima per $q = x + y$ è

$$q_{best} = \frac{q_{min} + q_{max}}{2} = x_{best} + y_{best} \tag{3.2}$$

e il suo errore assoluto è

$$\delta_q = \frac{q_{max} - q_{min}}{2} = \delta_x + \delta_y\,. \tag{3.3}$$

Un'argomentazione analoga mostra che l'errore nella differenza $p = x - y$ è dato dalla stessa formula (3.3). Cioè, l'errore sia nella somma $q = x+y$ che nella differenza $p = x-y$ è la "somma" $\delta_x + \delta_y$ degli errori assoluti in x e in y.

Se abbiamo varie grandezze, x, y, ... , che devono essere sommate o sottratte, allora l'applicazione ripetuta della (3.2) e della (3.3) dà la seguente regola.

Incertezze nelle somme e nelle differenze. Se le grandezze x, y, z, ... , sono misurate con incertezza δ_x, δ_y, δ_z, ... , e i valori misurati sono utilizzati per calcolare la grandezza

$$q = x + y - z + \cdots \tag{3.4}$$

allora l'errore nel valore calcolato di q è la somma

$$\delta_q \approx \delta_x + \delta_y + \delta_z + \cdots \tag{3.5}$$

di tutti degli errori assoluti delle singole grandezze.

In altre parole, quando si somma o si sottrae qualsiasi numero di grandezze, gli errori assoluti di quelle grandezze si sommano sempre. Come prima, utilizziamo il simbolo ($\approx$) per fare notare che nei successivi paragrafi apporteremo dei miglioramenti a questa regola.

Esempio 3.1. Supponiamo che uno studente mescoli insieme i liquidi di due recipienti, dopo aver misurato le masse separatamente da vuoti e da pieni. Lo studente riporta i seguenti valori:

M_1 = massa del primo recipiente + contenuto = (540 ± 10) g;
m_1 = massa del primo recipiente vuoto = (72 ± 1) g;
M_2 = massa del secondo recipiente + contenuto = (940 ± 20) g;
m_2 = massa del secondo recipiente vuoto = (97 ± 1) g.

Egli ora calcola la massa totale di liquido come:

$$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = (540 - 72 + 940 - 97)\ \text{g} = 1311\ \text{g}\,.$$

Secondo l'equazione (3.5) nella regola di sopra, l'errore nel risultato è la somma delle quattro incertezze:

$$\delta_M \approx \delta_{M_1} + \delta_{m_1} + \delta_{M_2} + \delta_{m_2} = (10 + 1 + 20 + 1)\ \text{g} = 32\ \text{g}\,. \tag{3.6}$$

Così, il risultato finale, opportunamente arrotondato, è il seguente:

$$M = (1310 \pm 30)\ \text{g}\,.$$

Nell'esempio precedente, si nota che le incertezze più piccole danno un contributo trascurabile all'incertezza finale. Con l'esperienza, lo studente può imparare a identificare in anticipo quegli errori che sono trascurabili e che possono essere ignorati. Spesso questo può semplificare notevolmente il calcolo degli errori.

3.2.2 Propagazione degli errori nei prodotti e quozienti

Prima di affrontare il calcolo degli errori nelle grandezze che si ottengono dal prodotto o dal quoziente di due grandezze misurate, è utile richiamare la definizione di errore relativo. Ricordiamo che se misuriamo qualche grandezza x come:

$$(\text{valore misurato di } x) = x_{best} \pm \delta_x \,, \tag{3.7}$$

nel solito modo, allora l'errore relativo in x è definito come:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{|x_{best}|} \,. \tag{3.8}$$

Il valore assoluto nel denominatore rende l'errore relativo sempre positivo, anche quando x_{best} è negativo.

Il risultato della misurazione di qualsiasi grandezza x può essere espresso in termini del suo errore relativo ε_x come:[1]

$$(\text{valore di } x) = x_{best} \pm \delta_x = x_{best} \left(1 \pm \frac{\delta_x}{|x|}\right) = x_{best}\ (1 \pm \varepsilon_x) \,. \tag{3.9}$$

Allora, il valore di $q = x \times y$ può essere scritto come:

$$(\text{valore di } q) = x_{best}\ (1 \pm \varepsilon_x) \times y_{best}\ (1 \pm \varepsilon_y) \,. \tag{3.10}$$

Il nostro problema è ora di trovare i valori probabili estremi di q. Sviluppiamo il prodotto nella (3.10) per trovare il più grande valore di q:

$$q_{max} = x_{best}\ y_{best}\ (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y) = x_{best}\ y_{best}\ (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_x \times \varepsilon_y) \,. \tag{3.11}$$

Il termine $\varepsilon_x \times \varepsilon_y$ nella relazione (3.11) può essere trascurato rispetto all'unità in quanto esso è il prodotto di due quantità piccole, che si suppone essere entrambe molto minore di uno. Troviamo, quindi, per il più grande valore probabile di q

$$q_{max} = x_{best}\ y_{best}[(1 + (\varepsilon_x + \varepsilon_y)] \,. \tag{3.12}$$

Il più piccolo valore di q si ottiene, invece, dal seguente prodotto

$$q_{min} = x_{best}\ y_{best}\ (1 - \varepsilon_x)(1 - \varepsilon_y) = x_{best}\ y_{best}\ (1 - \varepsilon_x - \varepsilon_y + \varepsilon_x \times \varepsilon_y) \,. \tag{3.13}$$

Il termine $\varepsilon_x \times \varepsilon_y$ nella relazione (3.13), come prima, può essere trascurato in quanto esso è il prodotto di due quantità piccole. Troviamo, quindi, per il più piccolo valore probabile di q

$$q_{min} = x_{best}\ y_{best}\ [1 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)] \,. \tag{3.14}$$

[1] Poiché il simbolo $\delta_x/|x_{best}|$ è scomodo da leggere e da scrivere, quando non si crea ambiguità, lo abbrevieremo omettendo la scritta "*best*" e scrivendo semplicemente $\delta_x/|x|$.

Combinando le due espressioni appena trovate otteniamo

$$(\text{valore di } q) = x_{best}\ y_{best}\ [(1 \pm (\varepsilon_x + \varepsilon_y)]\,. \tag{3.15}$$

Confrontando questo risultato con la forma standard,

$$(\text{valore di } q) = q_{best}(1 \pm \varepsilon_q)\,, \tag{3.16}$$

vediamo che il migliore valore per q è

$$q_{best} = x_{best}\ y_{best} \tag{3.17}$$

e che l'errore relativo è

$$\varepsilon_q \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y\,. \tag{3.18}$$

Un procedimento analogo può essere seguito per determinare come si propaga l'errore nel calcolo del rapporto di due grandezze $q = x/y$. Lasciamo allo studente il compito di verificare che anche nel rapporto si somma l'errore relativo.

Concludiamo che quando dividiamo o moltiplichiamo due grandezze misurate x e y, l'errore relativo nel risultato è la somma degli errori relativi in x e in y, come nella (3.18). Se ora moltiplichiamo o dividiamo varie grandezze, allora l'applicazione ripetuta di questo risultato porta alla seguente regola generale.

Incertezza nei prodotti e nei quozienti. Se parecchie grandezze $x, y, \ldots,$ sono misurate con errori piccoli δ_x, δ_y, $\ldots$, e i valori misurati sono utilizzati per calcolare

$$q = \frac{x \times \cdots}{y \times \cdots} \tag{3.19}$$

allora l'errore relativo nel valore calcolato di q è la somma

$$\varepsilon_q \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \ldots \tag{3.20}$$

degli errori relativi in $x, y, \ldots$.

Brevemente, quando si moltiplicano o si dividono delle grandezze "gli errori relativi si sommano".

Esempio 3.2. Può capitare talvolta di dover trovare un valore per la lunghezza l di un oggetto senza poterla misurare direttamente, ma misurando altre tre lunghezze l_1, l_2, l_3 in termini delle quali

$$l = \frac{l_1 \times l_2}{l_3}\,. \tag{3.21}$$

Supponiamo di effettuare un tale esperimento e di ottenere i risultati

$$l_1 = (200 \pm 2)\ \text{m}\,; \quad l_2 = (5.5 \pm 0.1)\ \text{m}\,; \quad l_3 = (10.0 \pm 0.4)\ \text{m}\,. \tag{3.22}$$

La nostra migliore stima per l è

$$l_{best} = \frac{200 \times 5.5}{10.0} = 110\ \text{m}\,. \tag{3.23}$$

Secondo la (3.20), l'errore relativo in questo risultato è la somma degli errori relativi in l_1, l_2, l_3 che sono 1%, 2%, e 4%. Così, ε_l risulta essere

$$\varepsilon_{l\%} = \varepsilon_{l_1\%} + \varepsilon_{l_2\%} + \varepsilon_{l_3\%} = 1\% + 2\% + 4\% = 7\%\,. \tag{3.24}$$

Noto l'errore relativo possiamo calcolare l'errore assoluto

$$\delta_l = \frac{\varepsilon_{l\%}}{100} \times l = \frac{7}{100} \times 110\ \text{m} \approx 8\ \text{m}\,. \tag{3.25}$$

Quindi, il nostro risultato finale sarà

$$l = (110 \pm 8)\ \text{m}\,. \tag{3.26}$$

Prodotto di una grandezza per un numero esatto

Supponiamo di misurare una grandezza x e quindi di utilizzare il nostro risultato per calcolare il prodotto $q = Bx$, dove il numero B è un numero esatto, cioè "non ha errore".[2] Per esempio, potremmo misurare il diametro D di un cerchio e quindi calcolare la sua circonferenza C come:

$$C = \pi D\,; \tag{3.27}$$

oppure, potremmo misurare lo spessore S di 100 identici fogli di carta e quindi calcolare lo spessore di un singolo foglio come $s = S/100$. Secondo la (3.20), l'errore relativo in $q = Bx$ è la somma dell'errore relativo di B e quello di x. Dal momento che $\delta_B = 0$ e il numero B è un numero esatto, allora si ha:

$$\varepsilon_q \approx \varepsilon_x\,, \quad \text{ossia} \quad \frac{\delta_q}{|q|} = \frac{\delta_x}{|x|}\,. \tag{3.28}$$

Moltiplicando ambo i membri per $|q|$ e semplificando, si ottiene $\delta_q = |B|\delta_x$. Abbiamo quindi la seguente regola.

[2] A parte per le costanti numeriche esatte, l'affermazione "non ha errore" significa che la grandezza in esame ha un errore molto più piccolo (trascurabile) degli errori delle altre grandezze presenti nel calcolo oppure la grandezza è nota con un qualsivoglia numero di cifre significative.

Prodotto di una grandezza per un numero esatto. Se la grandezza x è misurata con un errore assoluto δ_x ed è utilizzata per calcolare il prodotto

$$q = Bx\,, \tag{3.29}$$

dove B non ha errore, allora l'errore assoluto in q è $|B|$ volte quello in x

$$\delta_q = |B|\delta_x\,. \tag{3.30}$$

Questa regola è particolarmente utile quando si misura qualcosa che è estremamente piccolo, ma è disponibile molte volte assieme, come lo spessore di un foglio di carta o il tempo di rivoluzione di una ruota che gira rapidamente, o il periodo di un pendolo che compie piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

Esempio 3.3. Se misuriamo lo spessore S di 100 fogli di carta e otteniamo come risultato

$$S = (1.3 \pm 0.1)\ \text{cm}, \tag{3.31}$$

allora immediatamente segue che lo spessore s di un singolo foglio è

$$s = \frac{S}{100} = (0.013 \pm 0.001)\ \text{cm} = (0.13 \pm 0.01)\ \text{mm}\,. \tag{3.32}$$

La procedura seguita nell'esempio precedente permette di effettuare misurazioni che altrimenti richiederebbero apparecchiature piuttosto sofisticate e inoltre fornisce un errore assoluto marcatamente piccolo. Naturalmente, nell'esempio appena visto, occorre essere sicuri che tutti i fogli abbiano lo stesso spessore. Tuttavia, è importante notare che sebbene l'errore assoluto nella misura dello spessore di un foglio in questa maniera si riduce, l'errore relativo rimane sempre lo stesso.

Propagazione degli errori nelle potenze

Supponiamo di misurare la velocità v di un corpo e, quindi, per trovare l'energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$, bisogna calcolare il quadrato della velocità v^2. Dal momento che $v^2 = v \times v$, segue dalla (3.20) che l'errore relativo in v^2 è il doppio dell'errore relativo in v. Più in generale, è chiaro dalla (3.20) che la regola generale per qualunque potenza è la seguente.

Incertezza in una potenza. Se la grandezza x è misurata con un errore assoluto δ_x ed è utilizzata per calcolare la potenza

$$q = x^n \,, \tag{3.33}$$

allora l'errore relativo in q è n volte quello in x

$$\varepsilon_q = n\ \varepsilon_x \,. \tag{3.34}$$

La derivazione di questa regola richiede che n sia un intero positivo. In realtà, come vedremo nel Capitolo 6 la regola si generalizza per "qualunque" esponente n.

Esempio 3.4. Supponiamo che uno studente misuri l'accelerazione di gravità g misurando il tempo di caduta t di un sasso da un'altezza h al suolo. Dopo aver misurato parecchie volte il tempo di caduta del sasso, egli conclude che

$$t = (1.6 \pm 0.1)\ \mathrm{s} \,. \tag{3.35}$$

Lo studente misura l'altezza h, ottenendo quindi

$$h = (14.1 \pm 0.1)\ \mathrm{m} \,. \tag{3.36}$$

Dal momento che h è dato dalla ben nota formula $h = \frac{1}{2}gt^2$, egli calcola g come:

$$g = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \times 14.1}{1.6^2} \times 100 = 11.02\ \mathrm{m/s^2} \,. \tag{3.37}$$

L'errore in questo risultato può essere trovato utilizzando le regole già sviluppate. A questo scopo, è necessario conoscere gli errori relativi in ciascuno dei due fattori nell'espressione $g = 2h/t^2$ utilizzata per calcolare g. Il fattore 2 non ha errore. Gli errori relativi in h e in t sono

$$\varepsilon_{h\%} = \frac{\delta_h}{|h|} \times 100 = \frac{0.1}{14.1} = 0.71\% \tag{3.38}$$

e

$$\varepsilon_{t\%} = \frac{\delta_t}{|t|} \times 100 = \frac{0.1}{1.6} = 6.3\% \,. \tag{3.39}$$

Secondo la regola (3.34), l'errore relativo di t^2 è il doppio di quello in t. Allora, applicando la regola (3.20) per i prodotti e i quozienti alla formula $g = 2h/t^2$, troviamo l'errore relativo

$$\varepsilon_{g\%} = \varepsilon_{h\%} + 2\varepsilon_{t\%} = 0.71 + 2 \times 6.3 \approx 13\% \tag{3.40}$$

e quindi l'errore assoluto

$$\delta_g = g \times \frac{\varepsilon_{g\%}}{100} = 11.02 \times \frac{13}{100} = 1.43 \approx 1.4 \text{ m/s}^2 . \tag{3.41}$$

Così, il risultato finale del nostro studente risulta essere

$$g = (11.0 \pm 1.4) \text{ m/s}^2 . \tag{3.42}$$

L'esempio precedente mostra quanto semplice possa spesso essere la stima degli errori. Esso mostra anche come l'analisi degli errori ci dice non solo l'entità degli errori, ma anche cosa deve essere fatto per ridurli. In questo esempio, è chiaro dalla relazione (3.40) che il più grande contributo viene dalla misura del tempo. Se vogliamo un valore più preciso di g, allora deve essere migliorata la misura di t; qualunque tentativo per migliorare la misura di h non porterà alcun miglioramento nella stima del valore di g.

3.3 Errori indipendenti e casuali

Le regole per la propagazione degli errori nelle misurazioni indirette finora trovate possono essere rapidamente riassunte:

i) quando le grandezze misurate sono sommate o sottratte, "gli errori assoluti si sommano";

ii) quando le grandezze misurate sono moltiplicate o divise, "gli errori relativi si sommano".

In questo paragrafo, discuteremo come, sotto certe condizioni, le incertezze calcolate utilizzando queste regole possono essere più grandi del necessario. Specificatamente, vedremo che se gli errori originari sono "indipendenti" e "casuali", allora una stima più realistica (e più piccola) dell'errore finale è data da regole similari, nelle quali gli errori assoluti (o errori relativi) sono "sommati in quadratura".

Supponiamo di calcolare la somma, $q = x + y$, di due numeri x e y che sono i risultati di due misurazioni, riportati nella forma standard

$$(\text{valore misurato di } x) = x_{best} \pm \delta_x , \tag{3.43}$$

$$(\text{valore misurato di } y) = y_{best} \pm \delta_y . \tag{3.44}$$

L'argomento utilizzato nei paragrafi precedenti per determinare l'errore assoluto che si propaga in un calcolo era il seguente. In primo luogo, la miglior stima per $q = x + y$ è

ovviamente $q_{best} = x_{best} + y_{best}$. In secondo luogo, dal momento che i più grandi valori probabili per x e y sono $x_{best} + \delta_x$ e $y_{best} + \delta_y$, il più grande valore probabile per q è

$$q_{max} = x_{best} + y_{best} + (\delta_x + \delta_y)\,; \tag{3.45}$$

analogamente, il più piccolo valore probabile di q è

$$q_{min} = x_{best} + y_{best} - (\delta_x + \delta_y)\,. \tag{3.46}$$

Allora, abbiamo concluso che il valore di q probabilmente giace tra questi due numeri, e l'incertezza in q è

$$\delta_q \approx \delta_x + \delta_y\,. \tag{3.47}$$

Per vedere perché questa formula è piuttosto una sovrastima di δ_q, consideriamo come potrebbe accadere che il reale valore di q sia uguale all'estremo più grande $(x_{best} + y_{best}) + (\delta_x + \delta_y)$. Ovviamente, questo accade se noi abbiamo sovrastimato x dell'intero ammontare δ_x e sovrastimato y dell'intero δ_y e questo è piuttosto improbabile che possa accadere. Se x e y sono misurati indipendentemente e sono affetti da errori casuali, allora vi è un 50% di probabilità che una "sottostima" di x sia accompagnata da una "sovrastima" di y, o viceversa. Chiaramente, la probabilità che noi sovrastimiamo sia x che y dell'intero ammontare δ_x e δ_y è piuttosto piccola. Di conseguenza, il valore $\delta_q \approx \delta_x + \delta_y$ è una sovrastima dell'errore probabile.

Che cosa costituisce allora una miglior stima di δ_q? Questo dipende da cosa precisamente intendiamo per incertezza; cioè, cosa intendiamo con l'affermazione che q è "probabilmente" in qualche punto tra $(q_{best} - \delta_q)$ e $(q_{best} + \delta_q)$. Dipende anche da quali sono le leggi statistiche che governano gli errori che influenzano il risultato delle misurazioni. Si può dimostrare che se le misurazioni delle grandezze x e y sono fatte indipendentemente, allora l'errore in $q = x + y$ è dato da

$$\delta_q \approx \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}\,. \tag{3.48}$$

Quando combiniamo due numeri elevandoli al quadrato, sommando i quadrati, e quindi facendo la radice quadrata, come nella (3.48) si dice che *i numeri sono sommati in quadratura*. Così, la regola riassunta in (3.48) può essere stabilita come segue.

> Se le misure di x e y sono indipendenti e soggette soltanto a incertezze casuali, allora l'incertezza δ_q nel valore calcolato di $q = x + y$ è la somma in quadratura delle incertezze δ_x e δ_y.

Confrontando la nuova Espressione (3.48) per l'errore in q con la nostra vecchia espressione,

$$\delta_q \approx \delta_x + \delta_y \,, \tag{3.49}$$

si nota subito che l'errore calcolato con l'Espressione (3.48) è sempre più piccolo di quello calcolato con la (3.49). L'errore ottenuto con la somma diretta viene comunemente chiamato *errore assoluto massimo* e qualche volta viene indicheremo con Δ anzicché δ. Come vedremo più avanti, l'errore calcolato con la somma in quadratura viene comunemente chiamato *errore probabile*.

Supponiamo, per esempio, che $q = x + y$ sia la somma di due lunghezze x e y misurate con lo stesso metro di acciaio. Supponiamo inoltre che la principale sorgente di incertezza sia da attribuire al fatto che il nastro sia stato progettato per un uso a una temperatura diversa dalla nostra. Se non conosciamo questa temperatura (e non abbiamo un altro metro affidabile per confronto), allora dobbiamo riconoscere che il nostro metro può essere più lungo o più corto della sua lunghezza calibrata, e quindi può fornire una lettura sotto o sopra stimata della lunghezza corretta. Si può ovviare facilmente a questo errore. Comunque, il punto qui è che se il nastro è troppo lungo, allora "sottostimiamo sia x che y"; e se il nastro è troppo corto, "sovrastimiamo sia x che y". Così non vi è possibilità per le cancellazioni che giustificavano l'uso della somma in quadratura per calcolare l'errore in q. Indipendentemente dal fatto che i nostri errori siano o no indipendenti e causali, l'errore in $q = x + y$ è "certamente non più grande" della somma semplice $\delta_x + \delta_y$:

$$\delta_q \lesssim \delta_x + \delta_y \,. \tag{3.50}$$

Cioè, la nostra vecchia Espressione (3.49) per δ_q è realmente "un limite superiore" valido in tutti i casi.

Se abbiamo qualche ragione per sospettare che gli errori in x e y non siano indipendenti e casuali (come nell'esempio della misura col metro di acciaio), allora non siamo giustificati a utilizzare la somma in quadratura (3.48) per δ_q. D'altra parte, il limite (3.50) garantisce che δ_q sia certamente non peggiore di $\delta_x + \delta_y$. Pertanto, per non rischiare di sottostimare malamente l'errore è meglio utilizzare la vecchia regola $\delta_q \approx \delta_x + \delta_y$.

Spesso, di fatto vi è poca differenza se si sommano gli errori in quadratura o si sommano direttamente. Per esempio, supponiamo che x e y siano lunghezze misurate con errori $\delta_x = \delta_y = 2$ mm. Se siamo sicuri che questi errori sono indipendenti e casuali, allora dovremmo stimare l'errore in $x + y$ come la somma in quadratura

$$\delta_q \approx \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} = \sqrt{4+4} = 2.8 \text{ mm} \approx 3 \text{ mm} \,, \tag{3.51}$$

ma se sospettiamo che gli errori non siano indipendenti, allora dovremmo utilizzare la somma ordinaria

$$\Delta_q \approx \delta_x + \delta_y = (2+2)\ \text{mm} = 4\ \text{mm}\,. \tag{3.52}$$

In molti esperimenti, la stima degli errori è così rozza che la differenza tra questi due risultati (3 mm e 4 mm) è priva di importanza. D'altra parte, talvolta la somma in quadratura è significativamente più piccola della somma ordinaria. Inoltre, piuttosto sorprendentemente, la somma in quadratura è talvolta più facile da calcolare della somma diretta.

Abbiamo appena discusso come le incertezze indipendenti e casuali in due grandezze x e y si propaghino per causare una incertezze nella somma $x+y$. Abbiamo visto che per questo tipo di incertezze i due errori assoluti dovrebbero essere sommati in quadratura. Si può naturalmente considerare il problema corrispondente per le differenze, i prodotti e i quozienti. Così, le versioni finali delle nostre due regole principali possono essere generalizzati nel seguente modo.

1. Incertezza nelle somme e nelle differenze. Supponiamo che le grandezze x, y, ... , sono misurate con errori piccoli δ_x, δ_y, ... , e i valori misurati sono utilizzati per calcolare

$$q = x + y + \cdots\,. \tag{3.53}$$

Se gli errori in x, y, ... , sono noti essere indipendenti e casuali, allora l'errore assoluto in q è dato dalla somma in quadratura

$$\delta_q \approx \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \cdots} \tag{3.54}$$

degli errori assoluti in x, y, ...
In ogni caso, δ_q non è mai più grande della loro somma diretta,

$$\delta_q \lesssim \delta_x + \delta_y + \cdots\,. \tag{3.55}$$

2. Incertezza nei prodotti e nei quozienti. Supponiamo che le grandezze x, y, ..., sono misurate con errori piccoli δ_x, δ_y, ... , e i valori misurati sono utilizzati per calcolare

$$q = x \times y \times \cdots\,. \tag{3.56}$$

Se gli errori in x, y, ..., sono noti essere indipendenti e casuali, allora l'errore relativo in q è dato dalla somma in quadratura

$$\varepsilon_q \approx \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \cdots} \tag{3.57}$$

degli errori relativi in x, y, ...
In ogni caso, ε_q non è mai più grande della loro somma diretta,

$$\varepsilon_q \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y + \cdots . \tag{3.58}$$

Esempio 3.5. Una leva semplice si trova in equilibrio statico dato dalla condizione $m_1\ b_1 = m_2\ b_2$. Sapendo che $m_2 = (14.4 \pm 0.4)$ kg, $b_1 = (70 \pm 5)$ cm e $b_2 = 2.0 \pm 0.1$ m, determinate il valore della massa m_1 e la sua indeterminazione.

La massa m_1 è data dalla seguente relazione

$$m_1 = m_2\ \frac{b_2}{b_1} = 14.4 \times \frac{2.0}{0.7} = 41.14 \text{ kg}\,. \tag{3.59}$$

Nell'ipotesi che le grandezze in questione non siano indipendenti, l'errore relativo massimo della massa m_1, ε_{m_1}, sarà dato dalla somma degli errori relativi ε_{m_2}, ε_{b_1} ed ε_{b_2}

$$\varepsilon_{m_1} = \varepsilon_{m_2} + \varepsilon_{b_1} + \varepsilon_{b_2} = 2.78\% + 7.14\% + 5\% = 14.9\%\,. \tag{3.60}$$

Pertanto, l'errore assoluto massimo sarà dato da

$$\delta_{m_1} = m_1 \times \varepsilon_{m_1} = 41.14 \times 0.149 \approx 6.1 \text{ kg}\,. \tag{3.61}$$

Assumendo invece che le misure delle masse e le misure delle distanze siano indipendenti e influenzati da errori casuali, si può stimare un errore probabile più piccolo

$$\varepsilon_{m_1} = \sqrt{\varepsilon_{m_2}^2 + (\varepsilon_{b_1} + \varepsilon_{b_2})^2} = \sqrt{(2.78\%)^2 + (7.14\% + 5\%)^2} \approx 12.5\%\,. \tag{3.62}$$

Il risultato quindi andrà scritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} m_1 = (41 \pm 6) \text{ kg} & \text{errore massimo}\,; \\ m_1 = (41 \pm 5) \text{ kg} & \text{errore probabile}\,. \end{cases}$$

3.4 Esercizi

Esercizio 3.1. Si calcoli il perimetro P di una superficie rettangolare di lati $x = x_{best} \pm \delta_x = (20.0 \pm 1.0)$ cm e $y = y_{best} \pm \delta_y = (30.0 \pm 1.0)$ cm, entrambi misurati con lo stesso metro a nastro. $[P = (100 \pm 4)$ cm$]$

Esercizio 3.2. Per misurare la massa di una quantità di liquido si pesa, in un primo tempo, il liquido e il contenitore che lo contiene, ottenendo $M = (283 \pm 5)$ g. Successivamente, viene pesato il contenitore vuoto, ottenendo $M_c = (128 \pm 3)$ g. Determinate la migliore stima per la massa del liquido m e l'errore associato. $[m = (155 \pm 8)$ g; $\varepsilon_{m\%} = 5\%]$

Esercizio 3.3. Le dimensioni di un blocco di legno, a forma di parallelepipedo retto, sono $a = (25.0 \pm 0.5)$ mm, $b = (35.0 \pm 0.5)$ mm e $c = (65.0 \pm 0.5)$ mm. Calcolare il volume del blocco. $[(57 \pm 2)$ cm^3 o al più (56.9 ± 2.4) cm$^3]$

Esercizio 3.4. Un ciclista percorre (25.00±0.10) km con una velocità media di (15.0±0.2) km/h. Quanto tempo impiega a percorrere tale distanza?
$[(1.67 \pm 0.03)$ h, 1 h 40 min $\pm$ 2 min$]$

Esercizio 3.5. Si vuole riempire una vasca di 1000 litri con acqua. Se il tubo di carico ha una portata di (6.0 ± 0.2) litri/s, quanto tempo è necessario per riempire la vasca?
$[t = (167 \pm 6)$ s$]$

Esercizio 3.6. Si vuole determinare la densità di un cilindro di alluminio. Con un calibro decimale, avente risoluzione $r = 0.1$ mm, si misura il diametro e l'altezza del cilindro, ottenendo rispettivamente $D = 16.1$ mm e $h = 24.9$ mm. Con una bilancia elettronica con display a tre cifre, avente un errore di precisione del 1.0% sul valore misurato, si misura la massa del cilindro, ottenendo $m = 14.0$ g. Determinate la densità del materiale di cui e composto il cilindro e l'errore assoluto ad essa associato.

$$\begin{array}{lll} m = 14.0 \text{ g} \ ; & \delta_m = 0.2 \text{ g} \ ; & \varepsilon_{m\%} = 1.7\% \ ; \\ V = 5.07 \text{ cm}^3 \ ; & \delta_V = 0.04 \text{ cm}^3 \ ; & \varepsilon_{V\%} = 0.8\% \ ; \\ \rho = 2.76 \text{ g/cm}^3 \ ; & \delta_\rho = 0.05 \text{ g/cm}^3 \ ; & \varepsilon_{\rho\%} = 1.9\% \ . \end{array}$$

3.5 Quesiti

Quesito 3.1. Calcolare il perimetro, P, di una superficie rettangolare di lati $x = (0.20 \pm 0.02)$ cm e $y = (0.30 \pm 0.02)$ cm, entrambi misurati con lo stesso metro a nastro.

a. $P = (1 \pm 0.08)$ cm
b. $P = (1.0 \pm 0.08)$ cm
c. $P = (1.00 \pm 0.08)$ cm
d. $P = (1.00 \pm 0.04)$ cm
e. $P = (1.0 \pm 0.1)$ cm

[c. $P = (1.00 \pm 0.08)$ cm]

Quesito 3.2. Uno studente vuole misurare la densità di un oggetto $\rho = m/V$. Sapendo che $m = (2.26 \pm 0.07)$ kg e $V = (3.17 \pm 0.13)$ litri, quant'è l'errore relativo nella misura della densità?

a. $\varepsilon_\rho = 0.072$
b. $\varepsilon_\rho = 0.013$
c. $\varepsilon_\rho = 0.07$
d. $\varepsilon_\rho = 0.05$
e. $\varepsilon_\rho = 0.051$

[d. $\varepsilon_\rho = 0.05$]

Capitolo 4

Propagazione degli errori nelle misure indirette: caso generale

Indice

4.1 Funzioni arbitrarie di una variabile 66

4.2 Funzioni di più variabili 70

4.3 Esercizi 72

4.4 Quesiti 72

Nel Capitolo 3, abbiamo visto che per misurare la maggior parte delle grandezze fisiche bisogna effettuare due operazioni distinte: misurazione e calcolo. Quando per stimare una grandezza dobbiamo fare queste due operazioni, anche la stima dell'errore necessita di due passi. Prima bisogna stimare gli errori nelle grandezze che sono misurate direttamente; successivamente, bisogna trovare come questi errori si "propaghino" attraverso i calcoli per produrre un errore nel risultato finale. Nel Capitolo 3, abbiamo trovato quattro semplici regole riguardanti la propagazione degli errori nelle somme e sottrazioni e quelle nelle moltiplicazioni e divisioni. In questo capitolo, discuteremo il caso generale della propagazione degli errori nelle misure indirette. Troveremo che praticamente tutti i problemi nella propagazione degli errori possono essere risolti utilizzando proprio questa regola generale, che comprende tutti i casi possibili. Dalla regola generale per la propagazione degli errori nelle misure indirette possono essere quindi derivate le quattro regole più semplici viste nel Capitolo 3.

4.1 Propagazione degli errori in una funzione arbitraria di una variabile

Supponiamo di avere misurato una grandezza e di avere ottenuto il valore x, che riportiamo nella sua forma standard $x_{best} \pm \delta_x$, e di voler calcolare una funzione nota $q = f(x)$. Un modo semplice per fare ciò è di disegnare il grafico di $f(x)$ e determinare graficamente la migliore stima per $f(x)$, $q_{best} = f(x_{best})$. Nella Figura 4.1 è mostrato il grafico di una generica funzione $f(x)$, dove è mostrato il valore x_{best} con il suo errore δ_x e il corrispondente valore q_{best} con il suo errore δ_q. L'incertezza δ_q può essere ottenuta dal grafico come l'uno o l'altra delle lunghezze δ_q mostrate. In questo modo, il valore di q nella forma standard è

$$q = q_{best} \pm \delta_q \,. \tag{4.1}$$

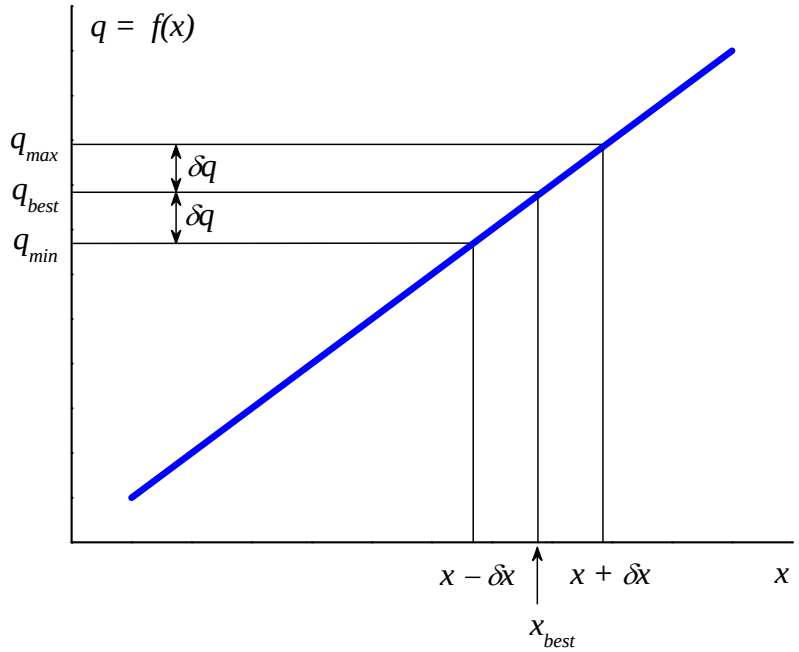


Figura 4.1: Grafico di q in funzione di x. Se x è misurato come $x_{best} \pm \delta_x$, allora la migliore stima per $q = f(x)$ è $q_{best} = f(x_{best})$. Il più piccolo e il più grande valore probabile di $f(x)$ corrispondono rispettivamente ai valori $x_{best} - \delta_x$ e $x_{best} + \delta_x$, rispettivamente.

Di solito, la funzione $f(x)$ è nota esplicitamente, per esempio $f(x) = \sin(x)$ oppure $f(x) = x$, quindi l'incertezza δ_q può essere calcolata analiticamente. È chiaro dalla Figura 4.1 che

$$\delta_q = f(x_{best} + \delta_x) - f(x_{best}) \,. \tag{4.2}$$

Ricordando la definizione di derivata di una funzione $f(x)$ rispetto alla variabile indipendente x, come il limite del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento, sotto l'ipotesi che tale limite esista e sia finito. Più precisamente, detto u l'incremento della variabile indipendente, una funzione $f(x)$ definita in un intorno di x_0 si dice derivabile nel punto x_0 se esiste ed è finito il seguente limite

$$\lim_{u\to 0} \frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}\,. \tag{4.3}$$

Il valore del limite (4.3) è la derivata della funzione $f(x)$ nel punto x_0 e si indica come $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ oppure come $f'(x)$.

Dal punto di vista geometrico, la derivata della funzione $f(x)$ in un punto x_0 è la tangente al grafico della $f(x)$ nel punto di coordinate $(x_0; f(x_0))$, cioè è il coefficiente angolare della retta tangente alla curva di $f(x)$ nel punto di coordinate $(x_0; f(x_0))$. In altre parole, la derivata è il valore della tangente trigonometrica dell'angolo che la retta tangente in x_0 al grafico della funzione forma con l'asse delle ascisse (a patto che tale angolo non sia retto). L'equazione della retta tangente in x_0 risulta essere quindi

$$f(x)-f(x_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\;(x-x_0)\,, \tag{4.4}$$

che può essere scritta anche come

$$q=q_0+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\;(x-x_0)\,, \tag{4.5}$$

con $q=f(x)$ e $q_0=f(x_0)$. È evidente che la derivata della funzione $f(x)$ nell'Equazione (4.5) è il coefficiente angolare della retta tangente nel punto in cui viene calcolate la derivata.

Ora, un'approssimazione fondamentale del calcolo differenziale asserisce che, per qualunque funzione $f(x)$ e qualunque incremento sufficientemente piccolo $u=x-x_0$, si ha

$$f(x_0+u)-f(x_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\;u=f'(x)\;u\,, \tag{4.6}$$

dove $f'(x)$ è la derivata della funzione $f(x)$ rispetto alla variabile x. Così, ammesso che l'errore δ_x sia piccolo (come assumiamo che sia), possiamo riscrivere la differenza nella (4.6) per ottenere la seguente relazione

$$\delta_q=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\;\delta_x=f'(x)\;\delta_x\,. \tag{4.7}$$

Quindi, per trovare l'errore assoluto δ_q, dobbiamo calcolare la derivata $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$ e moltiplicarla per l'errore assoluto δ_x della grandezza x.

La regola (4.7) non è del tutto nella sua forma finale. Essa è stata derivata per una funzione, come quella di Figura 4.1, la cui pendenza nell'intorno del punto x è positiva. Quando, invece la pendenza di $f(x)$ è negativa, allora il massimo valore probabile di q corrisponde al valore minimo di x, e viceversa. Cioè, $f'(x)$ è negativo. Pertanto, possiamo prendere il valore assoluto e scrivere $|f'(x)|$; abbiamo così la seguente regola generale.

Incertezza in qualunque funzione di una variabile. Se x è misurato con errore δ_x ed è utilizzato per calcolare la funzione $q = f(x)$, allora l'errore δ_q è dato dalla seguente relazione

$$\delta_q = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right| \delta_x \,. \tag{4.8}$$

Esempio 4.1. Supponiamo di misurare un angolo α e di ottenere il seguente valore

$$\alpha = (20 \pm 3) \text{ gradi} \,. \tag{4.9}$$

Supponiamo di voler trovare il valore della funzione $q = \cos(\alpha)$. La nostra miglior stima di $q = \cos(\alpha)$ è, naturalmente,

$$q = \cos(20^\circ) = 0.940 \,, \tag{4.10}$$

e secondo la (4.8) l'incertezza è

$$\delta_q = \delta_{(\cos\alpha)} = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \cos(\alpha)\right| \delta_\alpha \quad (\text{in rad}) \,. \tag{4.11}$$

Abbiamo indicato che δ_α deve essere espresso in radianti, in quanto la derivata di $\cos(\alpha)$ è $-\sin(\alpha)$ solo se α è espresso in radianti. Riscriviamo $\delta_\alpha = 3^\circ$ come $\delta_\alpha = 0.05$ rad; allora l'Equazione (4.11) dà

$$\delta_q = \delta_{(\cos\alpha)} = |\sin(20^\circ)| \times 0.05 = 0.342 \times 0.05 = 0.171 \,. \tag{4.12}$$

Così, il nostro risultato finale è

$$q = \cos(\alpha) = 0.940 \pm 0.017 \,. \tag{4.13}$$

Supponiamo, per esempio, di misurare la grandezza x e poi di calcolare la potenza, $q = x^n$, dove n è qualunque numero noto fissato, positivo o negativo (la generica funzione $f(x) = Ax^n$ viene detta *legge di potenza*). Secondo la (4.8) l'errore risultante in q è

$$\delta_q = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n\right| \delta_x = |nx^{n-1}| \delta_x \,. \tag{4.14}$$

Se dividiamo entrambi i membri di questa equazione per $|q| = |x^n|$, troviamo che

$$\varepsilon_q = \frac{\delta_q}{|q|} = |n| \frac{\delta_x}{|x|} = |n| \; \varepsilon_x \, ; \tag{4.15}$$

cioè, l'errore relativo in $q = x^n$ è $|n|$ volte quello in x. Questa è proprio la regola (3.34) trovata nel Paragrafo 3.2.2. Comunque, il risultato qui è più generale, dal momento che n può ora essere qualunque numero. Per esempio, se $n = 1/2$, allora $q = \sqrt{x}$, e

$$\varepsilon_q = \frac{\delta_q}{|q|} = \frac{1}{2} \frac{\delta_x}{|x|} = \frac{1}{2} \varepsilon_x \, ; \tag{4.16}$$

cioè, l'errore relativo in $\sqrt{x}$ è "la metà" di quello in x. Analogamente, l'errore relativo in $1/x = x^{-1}$ è lo stesso di quello in x.

Il risultato (3.34) ottenuto precedentemente è proprio un caso particolare della regola (4.8). Comunque, è sufficientemente importante da meritare una notazione separata come la seguente regola generale.

> **Incertezza in una potenza.** Se x è misurato con incertezza δ_x ed è utilizzato per calcolare la potenza $q = x^n$, dove n è un numero noto, allora l'errore relativo in q è $|n|$ volte quello in x,
>
> $$\varepsilon_q = \frac{\delta_q}{|q|} = |n| \; \varepsilon_x \, . \tag{4.17}$$

Esempio 4.2. Si vuole calcolare il volume di un cubo di lato $l = (10 \pm 0.5)$ mm con la corrispondente indeterminazione. Il volume del cubo è

$$V = l^3 = 10^3 \text{ mm}^3 \, . \tag{4.18}$$

Applicando la regola (4.17) otteniamo

$$\varepsilon_V = 3\varepsilon_l = 3 \times \frac{0.5}{10} = 0.15 \, ; \tag{4.19}$$

l'errore assoluto del volume risulta

$$\delta_V = \varepsilon_V \times V = 150 \text{ mm}^3 \, . \tag{4.20}$$

Possiamo, quindi, scrivere il risultato finale del calcolo del volume del cubo come:

$$V = (1000 \pm 150) \text{ mm}^3 \, . \tag{4.21}$$

4.2 Propagazione degli errori in qualunque funzione di più variabili

In generale, la grandezza che si vuole determinare può dipendere da più di una misura diretta, cioè può dipendere da più di una variabile, allora tale grandezza si può esprimere come $q = f(x, y, \ldots)$. Se gli errori associati alle misurazioni dirette delle grandezze $x, y, \ldots,$ sono piccoli, come solitamente ci si aspetta, l'errore assoluto in q può essere calcolato usando la formula del calcolo del differenziale totale di una funzione di più variabili:

$$\delta_q \approx \left|\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \ldots)\right| \delta_x + \left|\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, \ldots)\right| \delta_y + \cdots , \tag{4.22}$$

dove $\partial f(x, y, \ldots)/\partial x$ è la derivata parziale rispetto a x, $\partial f(x, y, \ldots)/\partial y$ è la derivata parziale rispetto a y e così via.

Nel caso in cui le grandezze sono influenzate da errori indipendenti e casuali, la regola generale per la propagazione degli errori è la seguente.

Incertezza in qualunque funzione di più variabili. Se $x, y, \ldots,$ sono misurati con errori δ_x, δ_y, $\ldots$, e sono utilizzati per calcolare la funzione $f(x, y, \ldots)$, allora l'errore δ_q è dato da

$$\delta_q = \sqrt{\left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \ldots)\ \delta_x\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, \ldots)\ \delta_y\right]^2 + \cdots} . \tag{4.23}$$

Le derivate parziali $\partial f(x, y, \ldots)/\partial x$ si chiamano *coefficienti di sensibilità* e descrivono quanto l'errore di una variabile indipendente influenzi la stima della grandezza derivata. Vi sono dei casi in cui la complessità del calcolo delle derivate parziali rende sconsigliabile la determinazione analitica dei coefficienti di sensibilità. In questo caso, conviene determinare tali coefficienti per via numerica, "perturbando" la funzione con una variazione positiva e negativa pari all'incertezza di ciascuna variabile indipendente, mantenendo invariate tutte le altre. La variazione del valore della funzione ci dà indicazioni del valore dei coefficiente di sensibilità.

La formula (4.23) permette di generalizzare tutte le relazioni finora trovate per il calcolo della propagazione degli errori nelle misure indirette. Infatti, se consideriamo, per esempio, la somma $q = x + y$, l'errore in q risulta semplicemente

$$\delta_q = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} , \tag{4.24}$$

come avevamo già trovato nel Paragrafo 3.2.1.

Abbiamo acquisito abbastanza nozioni per poter affrontare la maggior parte dei problemi nella propagazione degli errori. Qualunque calcolo può essere diviso in più passi passi, ciascuno dei quali coinvolge una delle seguenti operazioni:

- somme e sottrazioni;
- prodotti e divisioni;
- calcolo di una funzione di una variabile, come x^n, $\sin(x)$, e^x oppure $\ln(x)$.

Per esempio, potremmo calcolare

$$q = x[y - z\sin(\alpha)] \tag{4.25}$$

dalle grandezze misurate x, y, z, e α nei seguenti passi: calcolare la funzione $\sin(\alpha)$, quindi il prodotto di z e $\sin(\alpha)$, poi la differenza di y e $z\sin(\alpha)$, e infine il prodotto di x e $[y - z\sin(\alpha)]$. Conosciamo come le incertezze si propagano attraverso ciascuna di queste operazioni separate. Così, supposto che le varie grandezze in gioco siano indipendenti, possiamo calcolare l'incertezza nel risultato finale procedendo per passi dalle incertezze nelle misure dirette. Per esempio, se le grandezze x, y, z e α nella (4.25) sono state misurate con errori corrispondenti $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ e δ_α, allora potremmo calcolare l'errore in q come segue. Dapprima troviamo l'errore nella funzione $\sin(\alpha)$; noto questo, troviamo l'errore nel prodotto $z\sin(\alpha)$ e poi quello nella differenza $y - z\sin(\alpha)$; infine, troviamo l'errore nel prodotto completo.

Mettiamo in risalto due punti generali. In primo luogo, dal momento che gli errori nelle somme o nelle sottrazioni implicano errori assoluti (come δ_x), mentre quelli nei prodotti o divisioni implicano errori relativi (come $\varepsilon_x = \delta_x/|x|$), i nostri calcoli richiederanno qualche abilità nel passare da errori assoluti a relativi e viceversa. In secondo luogo, una importante semplificazione di tutti questi calcoli è, che (come abbiamo ripetutamente messo in evidenza) gli errori raramente si riportano con più di una cifra significativa. Quindi la maggior parte del calcolo può essere fatta molto rapidamente a mente, e molti errori più piccoli possono essere completamente trascurati.

In un tipico esperimento che implica parecchie misurazioni, può risultare particolarmente utile l'uso del foglio di calcolo (vedi Appendice I) per il calcolo di tutti i passi nella propagazione degli errori. Una volta che questo è stato fatto per la prima misura, è facilissimo estendere il calcolo a tutte le altre misure senza la necessità di dover ripetere tutti passaggi.

4.3 Esercizi

Esercizio 4.1. In un esperimento con la macchina di Atwood si calcola l'accelerazione delle due masse appese alla carrucola con la seguente formula:

$$a = g\frac{M-m}{M+m} \qquad M > m\,. \tag{4.26}$$

Sapendo che $M = (100 \pm 1)$ g, $m = (50 \pm 1)$ g e $g = 9.806$ m/s^2 con errore trascurabile rispetto alle masse, determinate la migliore stima di a e il suo errore.

$[\delta_a = \frac{2g}{M+m}\sqrt{(m\delta_M)^2 + (M\delta_m)^2},\ a = (3.3 \pm 0.1)$ m/s$^2]$

Esercizio 4.2. Stimare il momento angolare $L = I\omega$ di un disco omogeneo, di raggio $R = (0.250 \pm 0.005)$ m, massa $m = (1.10 \pm 0.01)$ g e momento d'inerzia $I = \frac{1}{2}mR^2$, in rotazione intorno al suo asse con velocità angolare costante $\omega = (21.5 \pm 0.4)$ rad/s.

$[L = 0.74 \pm 0.03$ kg m^2/s$]$

4.4 Quesiti

Quesito 4.1. Uno studente deve determinare l'errore nella grandezza indiretta $z = kx^2$, dove k è una costante priva di errore. Quant'è δ_z?

a. $\delta_z = kx\delta_x$
b. $\delta_z = 2kx^2\delta_x$
c. $\delta_z = \delta_x/(kx^2)$
d. $\delta_z = 2kx\delta_x$
e. $\delta_z = 0$

[d. $\delta_z = 2kx\delta_x$]

Capitolo 5

Analisi preliminare dei dati sperimentali

Indice

5.1 Indici di posizione 74

5.1.1 Semisomma 74

5.1.2 Media aritmetica 74

5.1.3 Mediana 75

5.1.4 Moda 76

5.2 Indici di dispersione ed errori casuali 76

5.2.1 Semidispersione ed errore assoluto massimo 76

5.2.2 Varianza 76

5.2.3 Scarto quadratico medio e deviazione standard 77

5.2.4 Deviazione standard della media 77

5.3 Media ponderata o pesata 78

5.4 Errori strumentali, sistematici e casuali 79

5.5 Cifre significative nel valore di una grandezza 80

5.6 Discrepanza 83

5.7 Esercizi 85

5.8 Quesiti 85

Dal momento che non siamo in grado di determinare il valore vero di una grandezza, dobbiamo trovare il modo di ottenere una "stima" del valore della grandezza quanto più

possibile vicino al valore effettivo o valore vero. Inoltre, dobbiamo cercare un criterio che ci permetta di valutare l'affidabilità, cioè la credibilità, del valore stimato. Un attento esame della procedura di misura seguita consente quasi sempre di individuare le cause degli errori sistematici e, quindi, di eliminarle. Gli errori strumentali, spesso indicati come errori sistematici, non possono essere eliminati; possono solamente essere ridotti rimpiazzando lo strumento di misura con uno più preciso. La diversità, la variabilità e la casualità dei fattori che determinano gli errori casuali, invece, fanno sì che questi fattori non possano essere, di fatto, individuati e quindi eliminati. Tuttavia, proprio dalla loro variabilità si trae profitto per eseguire una stima della grandezza in esame e valutarne l'affidabilità. Diamo qualche definizione necessaria per potere iniziare una prima analisi, anche se elementare, dei dati sperimentali.

5.1 Indici di posizione

Quando si ha la possibilità di ripetere più volte una misurazione di una grandezza fisica, è sempre meglio ripeterla. In questo caso, si avrà una serie di misure distribuite in un intervallo di valori, detto *intervallo di dispersione*. Il valore *best* della grandezza, attorno al quale sono distribuite le misure, può essere stimato per mezzo dei cosiddetti *indici di posizione*. In generale, gli indici di posizione servono a trovare un unico valore che caratterizzi una distribuzione di dati.

5.1.1 Semisomma

Un indice di posizione usato quando si hanno pochi dati è la *semisomma* del valore minimo e massimo delle misure rilevate:

$$x_{best} = \frac{x_{min} + x_{max}}{2} \, ; \tag{5.1}$$

esso rappresenta il valore centrale dell'intervallo di dispersione.

5.1.2 Media aritmetica

Supponiamo che si possano effettuare molte misurazioni di una grandezza in condizioni tali che le cause d'errore possano ritenersi solo casuali, cioè che le misure siano affette solo da errori casuali. Supponiamo quindi di ottenere i valori x_1, x_2, ..., x_n, dove n indica il numero di misure effettuate. Se n è sufficientemente grande, ve ne sono certamente alcune inferiori al valore vero X della grandezza considerata e quindi tali che per esse la differenza $X - x_i$ è positiva; altre per le quali è invece $x_i > X$ e quindi la differenza $X - x_i$

è negativa. È intuitivo che quanto più grande è il numero n di misure, tanto migliore è la compensazione degli scarti per eccesso con quelli per difetto. Ciò significa che la *media aritmetica* dei valori x_1, x_2, ..., x_n, ossia la quantità

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,, \tag{5.2}$$

si discosta molto poco dal valore vero X della grandezza in esame e può essere assunta come stima della grandezza stessa. La quantità trovata $\overline{x}$ viene detta *valore medio* della serie di misure o semplicemente *media aritmetica*.

Proprietà della media aritmetica

La media aritmetica possiede un certo numero di proprietà matematiche. Qui di seguito ne elenchiamo alcune.

1. La somma dei valori x_1, x_2, ..., x_n è uguale al valore medio moltiplicato per il numero dei valori:
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x} \,. \tag{5.3}$$
2. La somma degli scarti, cioè delle differenze tra i valori x_i e la loro media aritmetica $\overline{x}$, è uguale a zero:
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0 \,. \tag{5.4}$$
3. La somma degli scarti al quadrato dei valori x_i dalla loro media aritmetica $\overline{x}$ assume valore minimo:
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \quad \text{assume valore minimo} \,. \tag{5.5}$$
4. La media aritmetica di una variabile y ottenuta con una trasformazione lineare $y = \alpha x + \beta$ è uguale a
$$\overline{y} = \alpha\overline{x} + \beta \,. \tag{5.6}$$

5.1.3 Mediana

Un altro indice di posizione è la *mediana*. Essa rappresenta quel valore che, una volta ordinati i dati, lascia sia alla sua sinistra sia alla sua destra la metà dei dati.[1]

[1] La mediana permette di definire i cosiddetti *quartili* e *percentili*; per esempio, la media corrisponde al $50-esimo$ percentile, invece il primo quartile corrisponde al $25-esimo$ percentile.

5.1.4 Moda

L'ultimo indice di posizione è la *moda*. Essa rappresenta il valore della variabile che si presenta il maggior numero di volte, ossia che si ripete con maggiore frequenza.

5.2 Indici di dispersione ed errori casuali

5.2.1 Semidispersione ed errore assoluto massimo

Al valore medio $\overline{x}$, calcolato con l'Equazione (5.2), va associato un errore che indichi il grado di incertezza del valore medio della serie di misure. Ci sono vari modi per stimare l'errore da associare al valore medio $\overline{x}$ di più misure, fra tutti questi modi si può prendere semplicemente la *semidispersione*, ossia la semi ampiezza dell'intervallo di dispersione, definita nel seguente modo

$$\Delta_x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}\,, \tag{5.7}$$

dove x_{max} e x_{min} sono, rispettivamente, il valore massimo e il valore minimo della serie di misure. Poiché l'intervallo di dispersione $2\Delta_x$ è l'intervallo entro cui cadono tutte le nostre misure, la semidispersione rappresenta il cosiddetto *errore assoluto massimo*.

5.2.2 Varianza

Un altro indice di dispersione molto usato è la cosiddetta *varianza* e si indica generalmente come $Var(x)$. Se $\overline{x}$ è la media delle misure $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ottenute in n osservazioni, le differenze

$$d_1 = x_1 - \overline{x}, \quad d_2 = x_2 - \overline{x}, \ldots, d_n = x_n - \overline{x} \tag{5.8}$$

indicano le *deviazioni* o *scarti* dalla media. Alcune di esse sono positive, altre negative, altre ancora possono essere nulle. La varianza è definita nel seguente modo

$$Var(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\,. \tag{5.9}$$

Sviluppando il quadrato del binomio dentro la sommatoria ed effettuano le somme, otteniamo

$$Var(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + \overline{x}^2 - 2\,x_i\,\overline{x}) = \overline{x^2} - \overline{x}^2\,. \tag{5.10}$$

Come si vede dall'Equazione (5.9) e dall'Equazione (5.10), le dimensioni della varianza non sono le stesse di quelle della grandezza a cui essa si riferisce, ma sono quelle della grandezza

elevata al quadrato. Questo ci impedisce di usare la varianza come errore da associare alla grandezza misurata, in quanto le due quantità non sono omogenee. Per superare questa difficoltà nel prossimo paragrafo introdurremo il cosiddetto *scarto quadratico medio* e la *deviazione standard*.

5.2.3 Scarto quadratico medio e deviazione standard

Per valutare il grado di incertezza legato a una serie di osservazioni sperimentali, si può prendere in considerazione il cosiddetto *scarto quadratico medio*. Se $\overline{x}$ è la media delle misure $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ottenute in n osservazioni, definiamo lo *scarto quadratico medio* la seguente grandezza

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2} = \sqrt{Var(x)}\,, \tag{5.11}$$

dove x_i è il valore della misura *i-esima* e $\overline{x}$ è la media aritmetica delle n misure. Essa indica, sostanzialmente, di quanto in media le misure ottenute in una serie di osservazioni si discostano dal valore medio $\overline{x}$. Il valore di σ_x dipende da come sono sparpagliate le misure attorno al valore medio a causa della presenza di errori casuali nelle singole misure.

Per evitare che, avendo effettuato una sola misurazione, il calcolo dello scarto quadratico medio venga zero dando una falsa informazione sulla precisione del risultato ottenuto si sostituisce $n-1$ a n nella (5.11)

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} d_i^2}\,. \tag{5.12}$$

Questa correzione al denominatore fa sì che la nuova definizione sia un po' più grande della precedente. Per questo motivo, si preferisce chiamare questa nuova quantità *deviazione standard*, per distinguerla dallo scarto quadratico medio. Osserviamo il caso limite di $n = 1$, cioè quando effettuiamo una sola misurazione: la prima definizione dà il risultato $\sigma_x = 0$, mentre la nuova dà un risultato indeterminato del tipo $0/0$, rispecchiando così la totale ignoranza inerente all'incertezza su una singola misura.

5.2.4 Deviazione standard della media

Resta il problema di valutare l'affidabilità del valore medio $\overline{x}$ calcolato, cioè di stabilire di quanto presumibilmente $\overline{x}$ differisce dal valore vero X. La teoria degli errori, della quale ci limitiamo qui a riportare senza giustificazione i risultati più significativi, mostra che tale

problema può ritenersi soddisfacentemente risolto se si determina il valore del cosiddetto *errore quadratico medio della media* o *deviazione standard della media*, dato da

$$\delta_{\overline{x}} \equiv \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n-1)}}\,; \tag{5.13}$$

esso fornisce un'utile indicazione del grado di incertezza legato al valore $\overline{x}$, assunto come valore presunto della grandezza. L'intervallo $(\overline{x} - \delta_x, \quad \overline{x} + \delta_x)$ può essere preso a indice di tale grado di incertezza.

Possiamo concludere che, data una serie di n misure (con n abbastanza grande), di cui $\overline{x}$ sia la media, l'errore quadratico medio della media, preso una volta con il segno $(-)$ e una volta con il segno $(+)$, permette di definire l'intervallo $(\overline{x} - \delta_x, \overline{x} + \delta_x)$ entro cui è presumibilmente compreso il valore vero della grandezza in esame. Ciò si esprime in modo conciso scrivendo:

$$\text{valore della grandezza } x = x_{best} \pm \delta_x = \overline{x} \pm \sigma_{\overline{x}}\,. \tag{5.14}$$

5.3 Media ponderata o pesata

Abbiamo finora supposto che le varie misurazioni di una stessa grandezza fisica fossero eseguite con la stessa precisione. In alcuni casi ciò può non essere vero. Si consideri in generale una grandezza x che sia stata misurata n volte ottenendo i valori x_1, x_2, ..., x_n con i rispettivi errori δ_{x_1}, δ_{x_2}, ..., δ_{x_n}. Nel caso in cui i valori x_1, x_2, ..., x_n siano stati ottenuti effettuando una media aritmetica di n gruppi distinti di misure, gli errori associati devono essere calcolati con i metodi descritti nei paragrafi precedenti. Non è lecito in questo caso fare semplicemente la media aritmetica degli n valori, perché così facendo si darebbe lo stesso "peso" a misure con precisione diversa. Per tenere conto dei differenti errori delle misure, la migliore stima del valore vero si ottiene calcolando la *media pesata o media ponderata*

$$\overline{x} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\,. \tag{5.15}$$

con i pesi p_i dati da

$$p_i = \frac{1}{\delta_{x_i}^2}\,, \tag{5.16}$$

dove δ_{x_i} è l'errore assoluto associato al valore x_i. Introducendo nel calcolo della media i pesi inversamente proporzionali al quadrato degli errori delle singole misure, le misure con

gli errori più grandi hanno peso più piccolo. In questo modo, per determinare la migliore stima della grandezza si tiene conto maggiormente delle misure con errore più piccolo.[2]

5.4 Errori strumentali, sistematici e casuali

Negli ultimi paragrafi abbiamo considerato che tutti gli errori sistematici e strumentali fossero stati ridotti a un livello trascurabile, prima di avere acquisito i valori delle misure. Supponiamo adesso di individuare e quindi eliminare tutti gli errori sistematici, ottimizzando la procedura sperimentale di misura, e considerare gli errori strumentali (errore di precisione e di lettura) nel caso in cui siano non trascurabili. Per esempio, potremmo aver misurato il periodo T con un cronometro che può avere una marcia consistentemente veloce o lenta. Nessuno di questo tipo di errore sistematico si evidenzierà nel confronto dei vari risultati ottenuti per il periodo T. Nella discussione che affronteremo qui, considereremo trascurabili questi errori sistematici e prenderemo in considerazione solo quelli strumentali. Come risultato, l'errore assoluto massimo, calcolato come semidispersione, può essere visto come la "componente statistica" $\delta_{T_{stat}}$ dell'incertezza δ_T, ma essa non è certamente l'incertezza totale. Il nostro problema è di decidere come stimare la "componente strumentale" $\delta_{T_{str}}$ e quindi come combinare $\delta_{T_{stat}}$ e $\delta_{T_{str}}$ per ottenere l'incertezza completa δ_T.

Non vi è una semplice teoria che ci dica cosa dobbiamo fare circa gli errori sistematici e strumentali. In realtà, l'unica teoria degli errori sistematici e strumentali è che gli errori sistematici devono essere identificati ed eliminati mentre gli errori strumentali devono essere ridotti fino a diventare molto minori della precisione richiesta. Comunque, in un corso di laboratorio questo è spesso impossibile. È spesso impossibile confrontare uno strumento con un altro migliore per effettuare una taratura e a maggior ragione comprare un nuovo strumento per sostituire uno strumento inadeguato. Per questa ragione o quando non si riesce a reperire i manuali degli strumenti, in alcuni corsi di laboratorio, sì stabilisce una regola che, in assenza di informazioni più specifiche, si dovrebbe considerare che gli strumenti introducono qualche definita incertezza nella misura. Per esempio, si potrebbe decidere che tutti i cronometri abbiano una incertezza fino a 0.5%, tutte le bilance fino al 1%, tutti i voltmetri e amperometri fino al 3% e così via. Date regole di questo genere, ci sono vari modi possibili di procedere. Nessuno di questi può in realtà essere giustificato rigorosamente e noi descriviamo qui un possibile approccio.

[2]Una giustificazione rigorosa di questa scelta per i pesi è data in J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori: lo studio delle incertezze nelle misure fisiche*, II Ed. Zanichelli (Bologna 1999).

Per esempio, nella misura del periodo di oscillazione di un pendolo semplice si trova il valore medio del periodo di oscillazione misurando una serie di valori di T. Come già ricordato, un'analisi statistica di vari risultati per T fornisce la componente casuale dell'errore. Possiamo ricavare la componente strumentale di δ_T tenendo conto delle indicazioni sugli strumenti di misura. Quindi, poiché ancora non abbiamo affrontato un'analisi completa degli errori casuali, possiamo ragionevolmente ritenere che l'incertezza totale massima è data da

$$\delta_T = \delta_{T_{stat}} + \delta_{T_{str}} \, . \tag{5.17}$$

Questa espressione fornisce una stima ragionevole della nostra incertezza totale, dato che il nostro apparato sperimentale ha incertezze che non possiamo eliminare. Nel Capitolo 10, questo punto sarà chiarito meglio.

L'incertezza totale massima nel risultato di una serie di misurazioni può essere ragionevolmente stimata sommando l'errore casuale e l'errore strumentale introdotto dagli strumenti di misura

$$\delta_x = \delta_{x_{stat}} + \delta_{x_{str}} \, . \tag{5.18}$$

Facciamo notare che sebbene l'errore casuale si può ridurre ripetendo molte volte le misure, l'errore introdotto dagli strumenti non si riduce ripetendo le misure e quindi *l'errore in una misura non può mai essere minore di* $\delta_{T_{str}}$. Questo argomento, proprio per la sua importanza, verrà ripreso nel Capitolo 10 dove si darà una giustificazione della procedura da seguire per tenere conto correttamente sia degli errori strumentali sia degli errori casuali.

5.5 Cifre significative nel valore di una grandezza

Ritorniamo nuovamente sulla questione del numero di cifre significative con cui bisogna riportare i valori delle misure dirette di grandezze fisiche. Quando le misure sono una serie di valori ottenuti con il medesimo strumento o con strumenti di pari sensibilità, devono essere scritte in modo tale che in tutte le misure sia esplicitamente indicato il valore dell'ultima cifra che lo strumento usato permette di definire. Così, riportando le misure di un intervallo di tempo ottenute con un cronometro avente una risoluzione del decimo di secondo, si scriverà

$$23.9 \text{ s}; \quad 24.0 \text{ s}; \quad 23.8 \text{ s}; \quad 24.1 \text{ s}; \tag{5.19}$$

e non

$$23.9 \text{ s}; \quad 24 \text{ s}; \quad 23.8 \text{ s}; \quad 24.1 \text{ s}\,. \tag{5.20}$$

Infatti, mentre dal punto di vista matematico scrivere 24.0 è equivalente a scrivere 24, dal punto di vista fisico si attribuisce un diverso significato alle due notazioni. Scrivendo 24.0, si intende che la misurazione corrispondente è stata eseguita con uno strumento capace di apprezzare i decimi di secondo e si precisa che la parte decimale del numero che esprime la misura ottenuta è effettivamente nulla; scrivendo invece 24, non si dà alcuna garanzia sul valore della parte decimale del numero che esprime la misura.

Non bisogna però cadere nell'errore opposto, cioè non bisogna pensare di esprimere una misura con un numero di cifre superiore a quello corrispondente alla effettiva precisione dello strumento usato. Se, per esempio, il risultato della misurazione di una lunghezza effettuata con un calibro Palmer[3] capace di apprezzare i centesimi di millimetro è di 5 mm più 42 centesimi di millimetro, si scriverà 5.42 mm e non 5.420 mm. Scrivendo infatti in questa seconda forma si attribuirebbe alla misura una risoluzione superiore a quella dello strumento usato; si ammetterebbe cioè, implicitamente, che, qualora si eseguissero altre misurazioni della lunghezza con il medesimo strumento, si potrebbero ottenere valori diversi per alcune unità sulla quarta cifra significativa, ossia valori come 5.418 mm oppure 5.423 mm; è ovvio che ciò non è certamente possibile con il calibro Palmer. Con la stessa attenzione va trattato anche il problema delle cifre significative da assegnare al valore *best* e all'errore assoluto di una grandezza fisica, ottenuti in seguito al calcolo, rispettivamente, della media dei valori delle misure e del corrispondente errore massimo oppure della deviazione standard della media. A questo scopo si può seguire la seguente regola per la corretta scrittura delle misure e delle loro incertezze.

> Per riportare correttamente una misura di una grandezza fisica, bisogna prima approssimare l'incertezza a una cifra significativa, tranne quando comincia per 1 che si deve approssimare con due cifre significative; la misura a cui tale errore è associato deve essere scritta con un numero di cifre tali che la cifra meno significativa riportata abbia lo stesso posto, rispetto al punto decimale, della cifra meno significativa con cui è stato approssimato l'errore. Nelle misure senza un'esplicita indicazione dell'indeterminazione, si assume un errore pari a una unità sulla cifra meno significativa riportata.

[3] Il calibro Palmer o micrometro è descritto in Appendice F.

Esempio 5.1. Supponiamo che i valori risultanti dalle misurazioni di una lunghezza l siano i seguenti (espressi in mm):

$$3.47 \quad 3.43 \quad 3.50 \quad 3.49 \quad 3.49 \quad 3.51 \quad 3.44 \quad 3.48\,.$$

Poiché la media aritmetica di questi valori è 3.47625 e il calcolo dell'errore quadratico medio della media fornisce il numero 0.01089..., potremmo essere tentati di scrivere:

$$l = (3.47625 \pm 0.01089)\ \text{mm}\,.$$

Un tale modo di scrivere, però, sarebbe del tutto privo di significato; infatti, dal momento che l'errore quadratico medio della media ci segnala che già la seconda cifra decimale del valore di l ottenuto è indeterminata, non ha senso riportare le cifre successive alla terza cifra significativa, ossia precisare che la quarta cifra significativa è 6, la quinta è 2 e la sesta è 5. Si dovrà invece scrivere:

$$l = (3.476 \pm 0.011)\ \text{mm}\,.$$

Analogamente, non si scriverà che la massa di un corpo è $m = (6.713895 \pm 0.002318)$ g o che il valore di una resistenza elettrica è $R = (240.2145 \pm 5.9478)\ \Omega$, ma si scriverà, rispettivamente, $m = (6.714 \pm 0.002)$ g ed $R = (240 \pm 6)\ \Omega$.

Esempio 5.2. Supponiamo che il periodo di oscillazione T di un pendolo semplice sia stato misurato 10 volte mediante un cronometro con risoluzione di 0.01 s e che i valori ottenuti siano 1.18, 1.22, 1.25, 1.35, 1.18, 1.31, 1.21, 1.15, 1.24 e 1.20 s. La media aritmetica dei valori misurati è

$$\overline{T} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} T_i = \frac{12.3}{10} = 1.229\ \text{s}\,.$$

L'errore assoluto massimo è dato dall'Equazione (5.7)

$$\Delta_T = \frac{1.35 - 1.15}{2} = 0.10\ \text{s}\,.$$

Possiamo concludere che il risultato finale delle misure è

$$T = (1.23 \pm 0.10)\ \text{s}\,. \tag{5.21}$$

Tale risultato indica che il valore effettivo del periodo di oscillazione del pendolo è, presumibilmente, compreso tra 1.23 e 1.24 s.

Infine, determiniamo l'errore relativo ε_T come

$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{T} = \frac{0.10}{1.23} = 0.081 \approx 0.08 \tag{5.22}$$

e

$$\varepsilon_{T\%} = \frac{\delta_T}{T} \times 100 = \frac{0.10}{1.23} \times 100 = 8.1\% \approx 8\% \,. \tag{5.23}$$

Una volta calcolata la media $\overline{x}$ dei valori ottenuti, per sapere di quanto $\overline{x}$ si discosta dal valore vero X della grandezza misurata, si può calcolare l'errore assoluto massimo per avere una indicazione del grado di incertezza legato alla serie di misure.

5.6 Discrepanza

Supponiamo che una stessa grandezza fisica x sia misurata in due esperimenti diversi e che siano state ottenute due diverse stime di x. Per valutare quantitativamente se le due misure sono consistenti tra di loro, definiamo la *discrepanza* tra due misure.

La discrepanza è la differenza tra due valori misurati della stessa grandezza.

Più precisamente, supponiamo di avere ciascuna delle due misure espressa dalla migliore stima e da una incertezza a essa associata $x_1 = (x_1)_{best} \pm \delta_{x_1}$ ed $x_2 = (x_2)_{best} \pm \delta_{x_2}$. La discrepanza d è data da:

$$d = |(x_1)_{best} - (x_2)_{best}| \,. \tag{5.24}$$

È importante sottolineare che una discrepanza può essere *significativa* oppure *non significativa*. La discrepanza è significativa quando l'intervallo di estremi $(x_1)_{best} - \delta_{x_1}$ ed $(x_1)_{best} + \delta_{x_1}$ e l'intervallo di estremi $(x_2)_{best} - \delta_{x_2}$ ed $(x_1)_{best} + \Delta_{x_2}$ hanno almeno un punto in comune e cioè quando la discrepanza è maggiore della somma degli errori associati alle due misure: $d > \delta_{x_2} + \delta_{x_2}$. Se invece l'intervallo di estremi $(x_1)_{best} - \Delta_{x_1}$ ed $(x_1)_{best} + \delta_{x_1}$ e l'intervallo di estremi $(x_2)_{best} - \delta_{x_2}$ ed $(x_1)_{best} + \delta_{x_2}$ e cioè la discrepanza è minore della somma egli errori associati alle due misure, $d < \delta_{x_1} + \delta_{x_2}$, diremo che la discrepanza non è significativa. Vediamo meglio questo concetto con il seguente esempio. Nel Capitolo 10, invece vedremo come quantificare il livello di significatività della discrepanza nel caso in cui gli errori siano errori probabili.

Esempio 5.3. Nella Figura 5.1a sono mostrati due valori della stessa grandezza con il rispettivo errore, indicato con un segmento verticale di ampiezza $2\delta_x$, in cui la discrepanza non è significativa; mentre, nella Figura 5.1b sono mostrati due valori della stessa grandezza, in cui la discrepanza è significativa.

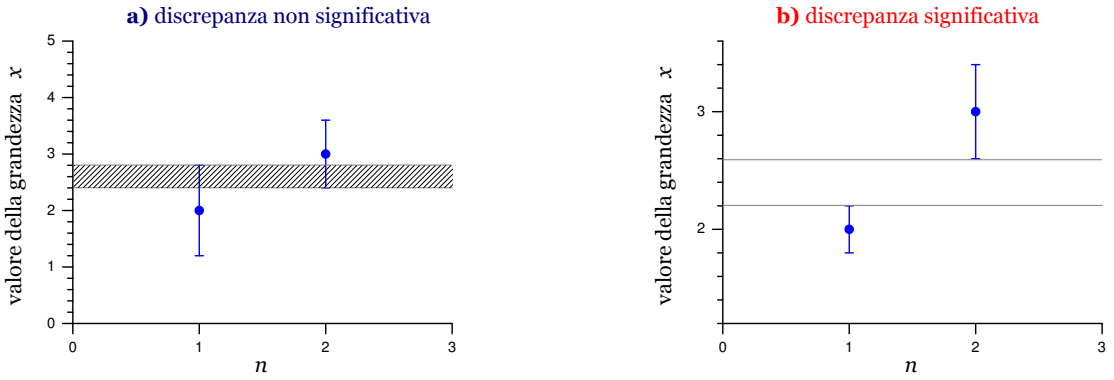


Figura 5.1: a) Due valori della stessa grandezza, in cui la discrepanza non è significativa, $d < \delta_{x_1} + \delta_{x_2}$; b) due valori della stessa grandezza, in cui la discrepanza è significativa, $d > \delta_{x_1} + \delta_{x_2}$.

Nel Capitolo 7, discuteremo la trattazione statistica di misurazioni ripetute molte volte. Qui, desideriamo soltanto mettere in risalto che se una misurazione è ripetibile, essa dovrebbe essere ripetuta, sia per ottenere un risultato più realistico (mediando) e, ancora più importante, per dare qualche stima degli errori sulla base dello sparpagliamento dei risultati. Sfortunatamente, ripetere una misurazione non sempre metterà in luce errori. Se la misura è soggetta a qualche errore sistematico, che spinge i risultati tutti nella stessa direzione (come un orologio la cui marcia è lenta), allora lo sparpagliamento dei risultati non rifletterà questo errore sistematico. Per eliminare tali errori sistematici, occorre fare verifiche accurate della calibrazione degli strumenti usati e delle procedure seguite per effettuare le misurazioni. Così pure se ripetiamo più volte la misurazione della lunghezza di una matita con un righello, troveremo sempre che la misura cade nello stesso intervallo di valori. Quindi, in questo caso la ripetizione della misurazione non fornisce ulteriori informazioni sull'indeterminazione del risultato ottenuto. Ciò è dovuto al fatto che l'errore strumentale è maggiore dell'errore casuale e quindi la ripetizione della misurazione con il medesimo strumento e con la medesima procedura non fornisce maggiori informazioni sul grado di precisione del risultato. Più avanti vedremo un metodo che ci consente di stimare una grandezza e il corrispondente errore nel caso in cui gli errori strumentali siano maggiori degli errori casuali.

5.7 Esercizi

Esercizio 5.1. Uno studente misura una grandezza x cinque volte, ottenendo i seguenti risultati: 5, 7, 9, 7 e 8. Calcolare, senza usare la calcolatrice, il valore medio della grandezza misurata. [$\overline{x} = 7.2$]

Esercizio 5.2. La media $\overline{x}$ di n grandezze $x_1, \ldots, x_n$, è definita come la loro somma divisa per n; cioè $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$. Mostrare che la media degli scarti $d_i, \ldots, d_n$ è automaticamente zero. (Lo scarto d_i è dato da $d_i = x_i - \overline{x}$.) Se non siete familiari con il simbolo di sommatoria $\sum$, fate il calcolo scrivendo la somma $\sum(x_i - \overline{x})$ come $(x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + \cdots + (x_n - \overline{x})$, e raggruppate di nuovo.

Esercizio 5.3. Uno studente misura il periodo di un pendolo tre volte e ottiene i seguenti risultati: 1.6 s, 1.8 s e 1.7 s. Quali sono la media e l'errore assoluto massimo? (Fare il calcolo senza usare la calcolatrice!)

[$\overline{T} = 1.7$ s, $\Delta_T = 0.1$ s]

Esercizio 5.4. Determinare la media aritmetica, la deviazione standard, la deviazione standard della media per le seguenti misure di lunghezza (i valori sono espressi in cm): 7.5; 7.9; 7.4; 7.5; 6.9; 7.0; 7.4; 7.2; 7.8; 7.4; 7.3; 7.2; 7.6; 7.5; 7.7.

[$\overline{x} = 7.4$ cm, $\sigma_x = 0.288$ cm, $\sigma_{\overline{x}} = 0.0743$ cm $\quad\Rightarrow\quad$ $x = (7.40 \pm 0.07)$ cm]

5.8 Quesiti

Quesito 5.1. Uno studente misura una lunghezza, ottenendo i seguenti valori (espressi in mm): 3.45; 3.43; 3.50; 3.46; 3.49; 3.51; 3.44; 3.48. Determinate l'intervallo di dispersione, d, e il suo valore centrale, X.

a. $d = 0.08$ mm, $\quad X = 3.47$ mm
b. $d = 0.04$ mm, $\quad X = 3.47$ mm
c. $d = 0.08$ mm, $\quad X = 3.48$ mm
d. $d = 0.08$ mm, $\quad X = 3.46$ mm
e. $d = 0.10$ mm, $\quad X = 3.5$ mm

[a. $d = 0.08$ mm, $\quad X = 3.47$ mm]

Quesito 5.2. Approssimate con il corretto numero di cifre significative la misura 498 ± 39.

a. 498 ± 39
b. 490 ± 30
c. 500 ± 40
d. 500 ± 39
e. 490 ± 40

[c. 500 ± 40]

Capitolo 6

Rappresentazione e analisi grafica dei dati sperimentali

Indice

6.1 Rappresentazione grafica di dati sperimentali 87

6.2 Analisi dati con il metodo delle rette di massima e minima pendenza 90

6.3 Curve di taratura 95

6.4 Linearizzazione e scale logaritmiche 95

6.4.1 La scala logaritmica 95

6.4.2 Funzioni linearizzabili 98

6.5 Proposte di esperienze di laboratorio 105

6.6 Esercizi 107

6.7 Quesiti 109

L'attività di laboratorio deve essere mirata a formare gli studenti per comprendere autonomamente come "trattare" i dati sperimentali raccolti negli esperimenti di laboratorio. A questo scopo, è necessario acquisire gli elementi indispensabili dell'analisi dei dati sperimentali e della loro rappresentazione grafica.

6.1 Rappresentazione grafica di dati sperimentali

Per studiare l'andamento di una grandezza in funzione di un'altra è molto utile servirsi di un grafico. È noto dalla geometria che ogni punto di un piano può essere messo in

corrispondenza biunivoca con una coppia di numeri reali. Questa corrispondenza può essere fatta in vari modi. Generalmente, si fissa sul piano una coppia di assi cartesiani ortogonali, il primo chiamato *asse delle ascisse* (usualmente messo orizzontalmente) e il secondo chiamato *asse delle ordinate*, su ognuno dei quali viene fissata una scala individuata dalla posizione dello zero, dal verso positivo e dalla lunghezza dei segmenti unitari u_x e u_y, rispettivamente per l'asse delle ascisse e delle ordinate. A ogni coppia di numeri reali $(x; y)$ è associato, nel piano, il punto P che ha come ascissa il valore della variabile indipendente x e come ordinata il valore della variabile dipendente y. Se x e y sono legati dalla dipendenza funzionale $y = f(x)$, l'insieme dei punti del piano che soddisfano tale relazione costituisce il grafico della funzione $f(x)$.

La scelta del fattore di scala per le unità di misura delle ascisse e delle ordinate, rispettivamente u_x e u_y, deve essere fatta in modo da ottenere una rappresentazione grafica chiara e di facile interpretazione. La scelta di u_x e u_y, in connessione con i due intervalli entro i quali la funzione assume valori significativi, determina anche la fruibilità di un grafico; in altre parole, nel grafico va riportato solamente la regione significativa della funzione (per ulteriori indicazioni su come fare un grafico, si veda anche l'Appendice K). Pertanto, affinché un grafico sia utile occorre che esso sia chiaro e leggibile.

La scelta delle grandezze da rappresentare negli assi coordinati non è sempre facile. Spesso è utile riportare negli assi variabili adimensionate, definite come il rapporto fra la variabile e un suo valore caratteristico. Per esempio, si supponga di voler riportare la percentuale di stelle con massa compresa nell'intervallo $[M, M+\Delta M]$ presenti nella nostra galassia; difficilmente lungo le ascisse verrà posto il valore della massa in chilogrammi; è più conveniente riportare il rapporto fra la massa M della stella e quella del Sole $M_\odot$. Questo fa sì che i valori assunti dalle variabili non siano astronomicamente grandi o microscopicamente piccoli e fa sì che non vi sia alcuna necessità di dare i valori assoluti delle variabili e dei parametri intrinseci del problema.

I valori ottenuti nella misurazione di due grandezze fisiche possono essere riportati in un grafico, al fine di studiare la dipendenza funzionale le due grandezze, cioè come cambia una grandezza in funzione dell'altra. La presentazione in grafici dei dati sperimentali viene generalmente detta *rappresentazione grafica*. Esistono tuttavia delle differenze sostanziali tra i grafici di funzioni analitiche, cioè esprimibili con una funzione matematica, come nell'esempio precedente, e i grafici di misure di grandezze fisiche. Nel primo caso, si possono calcolare un numero grande quanto si vuole di coppie di valori $(x;\ y)$, cosicché la curva che rappresenta la funzione può essere determinata con grande accuratezza. Per la dipendenza sperimentale tra le due grandezze fisiche, si ha a disposizione, invece, un numero limitato di coppie di valori $(x;\ y)$. Inoltre, i valori sperimentali delle grandezze

misurate hanno una indeterminazione (errore). Per indicare simbolicamente sul grafico l'entità di tale errore, si associa a esso un segmento di lunghezza pari a due volte il valore dell'errore (vedi Figura 6.1 dell'esempio seguente).

La presenza degli errori, con il loro significato di indeterminazione del valore della misura, fa sì che la curva che descrive la relazione funzionale $y = f(x)$ tra le due grandezze misurate x e y non debba necessariamente passare per i punti $(x;\ y)$ ma per i rettangoli individuati, rispettivamente, da $2\delta_x$ e $2\delta_y$, dove δ_x e δ_y sono gli errori associati rispettivamente alle grandezze x e y.

Esempio 6.1. Supponiamo di misurare più volte la temperatura di un corpo al variare del tempo e di ottenere i valori e i rispettivi errori riportati in Tabella 6.1. La presentazione in tabelle dei dati sperimentali viene generalmente detta *rappresentazione tabellare*. Per disegnare il grafico dei dati acquisiti, seguiamo la procedura descritta nel paragrafo precedente.

Tabella 6.1: Valori di temperatura rilevati al trascorrere del tempo. L'indeterminazione sul tempo può essere dovuta sia all'errore introdotto dal cronometro sia al fatto che la misurazione della temperatura non può essere istantanea.

t	δ_t (s)	T	δ_T (°C)
2.0	0.5	10.0	1.0
4.0	0.5	12.0	1.0
6.6	0.5	15.0	1.0
9.0	0.5	17.0	1.0
11.0	0.5	19.9	0.5
13.0	0.5	22.3	0.5
14.8	0.5	24.4	0.5

Disegniamo i punti di coordinate $(x; y)$ e per ciascuno di essi disegniamo le corrispondenti barre di errore di ampiezza, rispettivamente, $2\delta_x$ e $2\delta_y$, dove δ_x e δ_y sono gli errori associati alla coppia di valori x e y. I dati sperimentali ottenuti dalle misurazioni dirette e gli errori ad essi associati sono illustrati graficamente in modo corretto nella Figura 6.1.

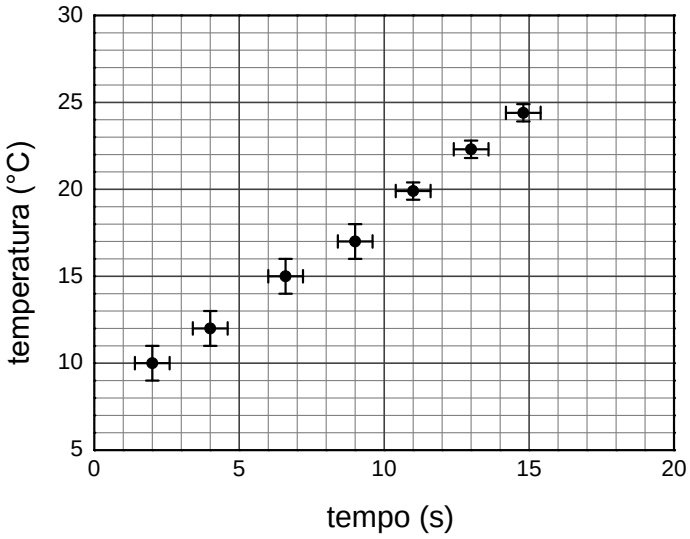


Figura 6.1: Rappresentazione grafica dei dati sperimentali riportati nella Tabella 6.1.

6.2 Analisi dati con il metodo delle rette di massima e minima pendenza

Abbiamo visto che se ripetiamo più volte una misurazione con uno strumento poco sensibile, troviamo che la misura cade sempre tra lo stesso intervallo di valori. Quindi, in questo caso la ripetizione della misurazione non fornisce ulteriori informazioni sull'indeterminazione del risultato ottenuto. Ciò è dovuto al fatto che l'errore strumentale è maggiore dell'errore casuale e quindi il risultato delle misurazioni ripetute più volte con il medesimo strumento non è influenzato da errori casuali e pertanto non si ottengono in questa maniera maggiori informazioni sul grado di precisione del risultato.

Qui di seguito, vediamo un metodo che ci consente di ridurre eventuali errori sistematici nel caso in cui si conosca a priori la funzione che lega le due grandezze in esame. In questo caso, i dati sperimentali servono a determinare i valori numerici dei parametri che caratterizzano tale funzione. Questo metodo, detto *metodo grafico*, consiste nell'individuare la retta che passa per i rispettivi rettangoli, individuati dagli errori massimi, associati ai punti sperimentali.

Ricordiamo brevemente che una retta è descritta dalla funzione

$$y = mx + q\,, \tag{6.1}$$

dove m è il coefficiente angolare della retta e q è l'intersezione con l'asse delle ordinate.

Il coefficiente angolare m della retta può essere determinato dal rapporto

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,, \tag{6.2}$$

dove $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ sono le coordinate di due punti del grafico. Per facilitare l'operazione di individuazione della retta che passa per i punti sperimentali, si deve cercare di porre in grafico i dati con le scale adatte in modo tale che il grafico assuma un andamento rettilineo, cioè, i dati siano descritti da una retta.[1] Si tracciano poi le due rette che, intersecando tutti i segmenti che rappresentano gli errori, abbiano rispettivamente la minima e la massima pendenza:

$$y = m_{min}\, x + q_{max}\,; \tag{6.3}$$

$$y = m_{max}\, x + q_{min}\,. \tag{6.4}$$

È più facile disegnare la retta di massima e quella di minima pendenza anziché la retta che meglio si adatta ai dati sperimentali, in quanto in quest'ultimo caso si possono tracciare più rette e tutte potrebbero essere altrettanto buone. Per questo motivo, è più facile tracciare la rette che ha la massima pendenza e quella che ha la minima pendenza e calcolare come media del valore massimo e del valore minimo la pendenza e l'intercetta della retta che meglio si adatta ai dati sperimentali

$$m = \frac{m_{max} + m_{min}}{2}\,; \tag{6.5}$$

$$q = \frac{q_{max} + q_{min}}{2}\,. \tag{6.6}$$

Inoltre, possiamo stimare l'indeterminazione dei parametri calcolando la semidispersione

$$\delta_m = \pm\frac{m_{max} - m_{min}}{2}\,; \tag{6.7}$$

$$\delta_q = \pm\frac{q_{max} - q_{min}}{2}\,. \tag{6.8}$$

Se i dati della Tabella 6.1 si riferiscono a un andamento rettilineo in un grafico lineare, cioè sono descritti dalla funzione

$$T = at + T(0)\,, \tag{6.9}$$

dal grafico dei dati, mostrato nella Figura 6.2, si ricavano i seguenti valori dei parametri:

$$a = (1.14 \pm 0.17)^\circ\mathrm{C/s}\,, \tag{6.10}$$

$$T(0) = (7.7 \pm 1.3)^\circ\mathrm{C}\,. \tag{6.11}$$

Bisogna notare che se non è possibile tracciare neanche una retta, che intersechi tutti i segmenti che rappresentano gli errori, significa che si è verificato uno dei seguenti casi:

[1] Eseguire questa operazione, spesso non è possibile e quando lo è non sempre è facile!

- l'ipotesi che la funzione fosse lineare è sbagliata;
- qualcuno dei punti sperimentali è affetto da un errore sistematico.

Lo studente, seguendo il buon senso, dovrebbe riconoscere la causa e intervenire opportunamente per superare questa difficoltà.

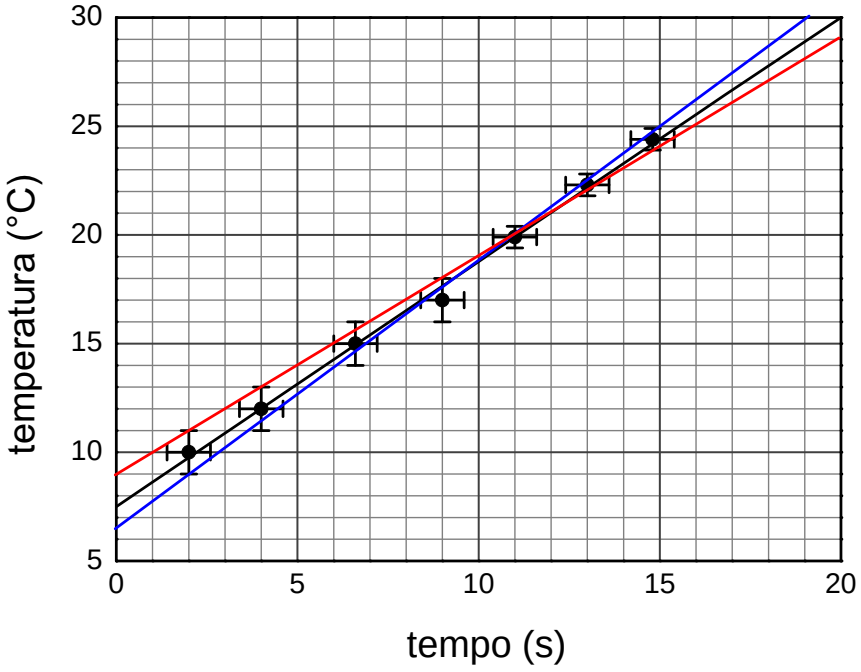


Figura 6.2: Determinazione grafica della retta che meglio si adatta ai dati sperimentali. Retta di adattamento (linea nera); retta di minima pendenza (linea rossa); retta di massima pendenza (linea blu).

Esempio 6.2. Determinazione sperimentale del valore di π. Nella geometria euclidea, π è definito come il rapporto fra la circonferenza e il diametro di uno stesso cerchio. Quindi, dato un cerchio di diametro D e circonferenza C, si definisce π come:

$$\pi = \frac{C}{D}\,. \tag{6.12}$$

Il valore di π è 3.1415926535 ...

Per determinare sperimentalmente il valore di π, basta misurare il diametro e la circonferenza di un disco e calcolare quindi π con l'Equazione (6.12). La misurazione del diametro del disco può essere realizzata direttamente con un righello. La misurazione della circonferenza è più difficile; essa si può eseguire avvolgendo un metro di carta attorno al cilindro e misurando la lunghezza della circonferenza. Quindi, misurando il diametro

e la circonferenza di una serie di cilindri di differente diametro, si ottengono i risultati riportati in Tabella 6.2.

Per determinare il migliore valore di π e la sua indeterminazione si riportano in grafico i valori di C e di D misurati. Dai dati della Tabella 6.2, si ottiene il grafico di Figura 6.3, da cui si vede che i dati seguono un andamento lineare, cioè sono disposti lungo una linea retta. Quindi, possiamo cercare una retta che passa per più punti, compreso l'origine degli assi.

Tabella 6.2: Valori misurati dei diametri dei cilindri e delle rispettive circonferenze; in tabella sono riportati anche gli errori strumentali dovuti alla sensibilità degli strumenti di misura usati. Nelle misure di circonferenza è stato attribuito un errore di 1 mm, in quanto in questo caso risulta più difficile la lettura del valore della lunghezza della circonferenza.

D (mm)	δ_D (mm)	C (mm)	δ_C (mm)
5.0	0.5	16.0	1.0
9.0	0.5	27.0	1.0
11.0	0.5	34.0	1.0
16.0	0.5	51.0	1.0
20.0	0.5	63.0	1.0

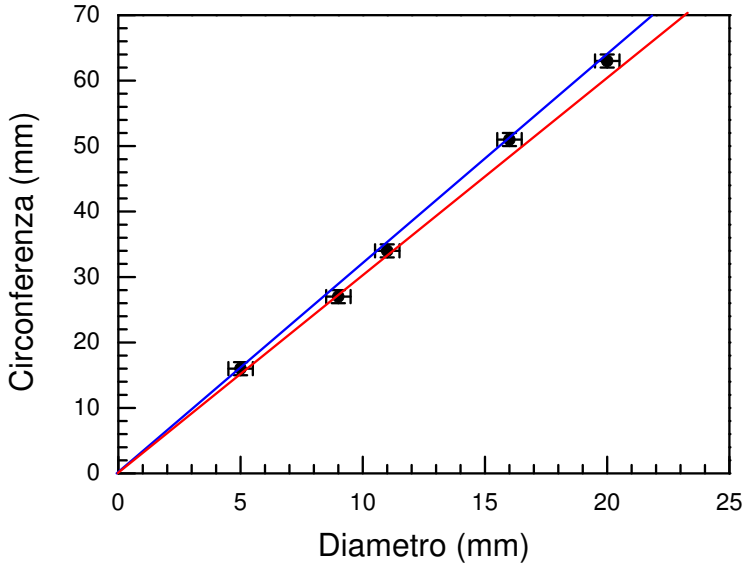


Figura 6.3: Grafico del valore della circonferenza in funzione del diametro; nel grafico sono riportate anche le rette di massima (linea blu) e di minima pendenza (linea rossa).

Il valore di π si trova calcolando la pendenza della *retta di best fit*, cioè la retta che meglio si adatta ai dati sperimentali. Tuttavia, è preferibile trovare i valori delle pendenze della retta di massima e minima pendenza, da cui ricavare il valore *best* di π e l'errore a esso associato con il seguente procedimento:

$$\begin{cases} \pi_{best} &= \dfrac{\pi_{max} + \pi_{min}}{2}\,, \\ \delta_\pi &= \dfrac{\pi_{max} - \pi_{min}}{2}\,. \end{cases}$$

Per fare ciò, si tracciano a mano le rette di massima e di minima pendenza e si calcolano le loro pendenze. In Figura 6.3, sono mostrate in blu la retta di massima pendenza e in rosso quella di minima pendenza. Si scelgono quindi due punti appartenenti alla retta considerata, di coordinate rispettivamente $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$, e si calcola il rapporto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}\,. \tag{6.13}$$

I valori che si ottengono dall'analisi grafica sono

$$\begin{cases} \pi_{max} = 3.23\,, \\ \pi_{min} = 3.04\,; \end{cases}$$

da cui possiamo calcolare

$$\begin{cases} \pi_{best} &= \dfrac{\pi_{max} + \pi_{min}}{2} = 3.135\,, \\ \delta_\pi &= \dfrac{\pi_{max} - \pi_{min}}{2} = 0.09\,. \end{cases}$$

Il risultato così ottenuto va approssimato correttamente. Il valore di π ottenuto è

$$\pi = \pi_{best} \pm \delta_\pi = 3.14 \pm 0.09\,. \tag{6.14}$$

L'errore relativo del valore di π stimato è

$$\varepsilon_\pi = \frac{\delta_\pi}{\pi_{best}} = \frac{0.09}{3.14} \approx 0.03\,. \tag{6.15}$$

Il metodo della retta di minima e massima pendenza, usato per la determinazione del valore di π, permette di stimare agevolmente l'indeterminazione nel valore di π, che risulta essere molto più piccola di quella che si otterrebbe facendo propagare gli errori strumentali di C e di D come

$$\varepsilon_\pi \approx \varepsilon_D + \varepsilon_C \approx 0.15\,. \tag{6.16}$$

Nei paragrafi seguenti affronteremo nuove situazioni sperimentali che possono essere facilmente rappresentate e analizzate graficamente.

6.3 Curve di taratura

Talvolta la determinazione sperimentale dell'andamento di una grandezza in funzione di un'altra non ha lo scopo di trovare i parametri funzionali della relazione tra le due grandezze e quindi di formulare algebricamente una legge fisica, ma soltanto quello di ottenere un grafico da cui ricavare, a partire dal valore di una delle due grandezze, il valore corrispondente dell'altra. Grafici come questi si chiamano *grafici di taratura*. In questi casi, se si suppone un andamento lineare, bisogna tracciare due rette parallele o convergenti, a seconda della posizione dei punti e all'entità degli errori. Nell'intervallo considerato, le rette non devono devono intersecarsi mai e devono delimitare la massima zona di piano entro la quale sono contenuti i punti sperimentali (con le loro barre d'errore).

6.4 Linearizzazione e scale logaritmiche

Abbiamo visto che, quando due grandezze fisiche sono legate da una relazione lineare, si possono ricavare utili informazioni su alcune proprietà del sistema in esame da una semplice analisi grafica dei risultati sperimentali. Tuttavia, la relazione tra le varie grandezze non è sempre una funzione lineare. In questo caso, al fine di semplificare l'analisi si cerca di manipolare i dati, per esempio con un cambiamento di variabile, in maniera tale da ottenere una relazione lineare tra le nuove variabili.

Se, per esempio, due grandezze fisiche sono legate da una dipendenza funzionale del tipo $y = ax^2 + b$, conviene riportare sull'asse delle ascisse la variabile $z = x^2$, in maniera da ottenere una relazione lineare tra la variabile y e la variabile z e potere determinare facilmente i parametri a e b. Ovviamente, dobbiamo ricordarci che l'errore da riportare sull'ascissa sarà quello di x^2, che va calcolato con le regole della propagazione degli errori introdotti nel Capitolo 3. Ovviamente, per ogni valore misurato x_i possiamo facilmente calcolare z_i, calcolare l'errore su z_i e riportare in grafico. Tuttavia, esiste un modo più semplice di operare. Nel prossimo paragrafo, vedremo come fare.

6.4.1 La scala logaritmica

Esistono in commercio particolari fogli di carta millimetrata con una particolare graduazione, in cui sono riportati lungo gli assi (o lungo un solo asse) dei segmenti proporzionali ai logaritmi[2] dei valori da rappresentare graficamente. Un grafico riportato in questi fogli

[2]**Definizione di logaritmo.** Consideriamo l'equazione esponenziale $b^x = a$, che ammette soluzione unica se e solo se $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$. Risolvere l'equazione esponenziale significa trovare quel valore di x che,

viene detto *in scala logaritmica* (o *in scala semi-logaritmica*).[3] Supponiamo per il momento di considerare logaritmi in base 10. Così, al numero 1 corrisponderà un segmento nullo; al numero 2 corrisponderà un segmento proporzionale a $\log 2 \approx 0.30$; al numero 10 un segmento proporzionale a $\log 10 = 1$; al numero 10^n un segmento proporzionale a $\log 10^n = n \log 10 = n$. Questo stesso risultato si ottiene utilizzando un qualunque software grafico (SciDAVis, Excel, Origin, ecc.), selezionando l'opzione di rappresentare una o entrambe le scale del grafico in scala logaritmica. È importante notare che il cambiamento di base del logaritmo non cambia la forma della funzione rappresenta; questo è dovuto alla seguente proprietà dei logaritmi

$$\log_a x = \log_b x \times \log_a b \tag{6.17}$$

e, poiché $\log_a b$ non è altro che un numero, il cambiamento di base influenza solo il fattore di scala e non influenza l'andamento della curva.

Figura 6.4 e Figura 6.5 mostrano, rispettivamente, un esempio di scala logaritmica e uno di scala semi-logaritmica.[4] Nel caso in cui si usano logaritmi decimali, ognuno dei segmenti da 1 a 10, così come quello da 10 a 100 o da 100 a 1000, viene detto *decade*.

Prima di fare qualche esempio sull'utilità di usare la scala logaritmica per ottenere relazioni funzionali più semplici, è importante sottolineare che la scala logaritmica è essenziale anche quando una delle due variabili varia in un ampio range. Infatti, supponiamo di avere una grandezza che varia da 10^{-2} a 10^4. In una scala lineare, questi valori sono praticamente impossibili da rappresentare, infatti se facciamo corrispondere il punto $x = 0.01$ a 1 mm di una scala lineare, il punto a $x = 10^4$ dovrebbe corrispondere a 10^6 mm. D'altra parte, se usiamo una scala lineare lungo un asse che riporta un intervallo $0 - 10^4$, i punti che cadono a x piccoli saranno molto vicini tra di loro (indistinguibili a occhio) e le variazioni non possono essere ben visualizzate.

Se usiamo una scala logaritmica, fissiamo sulla scala il punto corrispondente a $x = 1$ ($\log 1 = 0$), decidiamo quanto deve essere lungo il segmento corrispondente a $\log 10 = 1$ e, poiché $\log 10^4 = 4 \log 10 = 4$, il punto a $x = 10^4$ sarà a una distanza 4 volte quella

posto all'esponente di b, dia come risultato a. Questo equivale a scrivere $x = \log_b(a)$, espressione che si legge "x è il logaritmo in base b di a". Il logaritmo che ha per base il numero di Nepero e ($e = 2.71828\ldots$) si chiama *logaritmo naturale* e si indica con ln; il logaritmo che ha per base 10 si chiama *logaritmo decimale* e si indica con log.

[3] Per un approfondimento sull'uso dei grafici in scala log-log e semilog si veda: R. C. Davidson, *Metodi Matematici per un Corso Introduttivo di Fisica*, EdiSES, II Ed., (Napoli 2013).

[4] È importante notare che i valori riportati lungo gli assi sono gli argomenti dei logaritmi; ciò permette di rappresentare facilmente i dati.

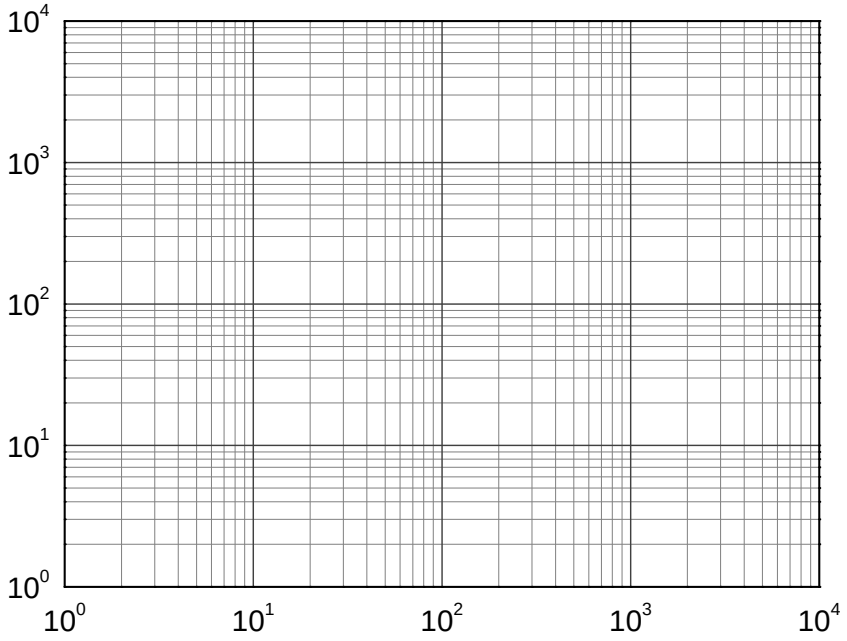


Figura 6.4: Esempio di sistema di coordinate in cui entrambi gli assi sono in scala logaritmica in base dieci.

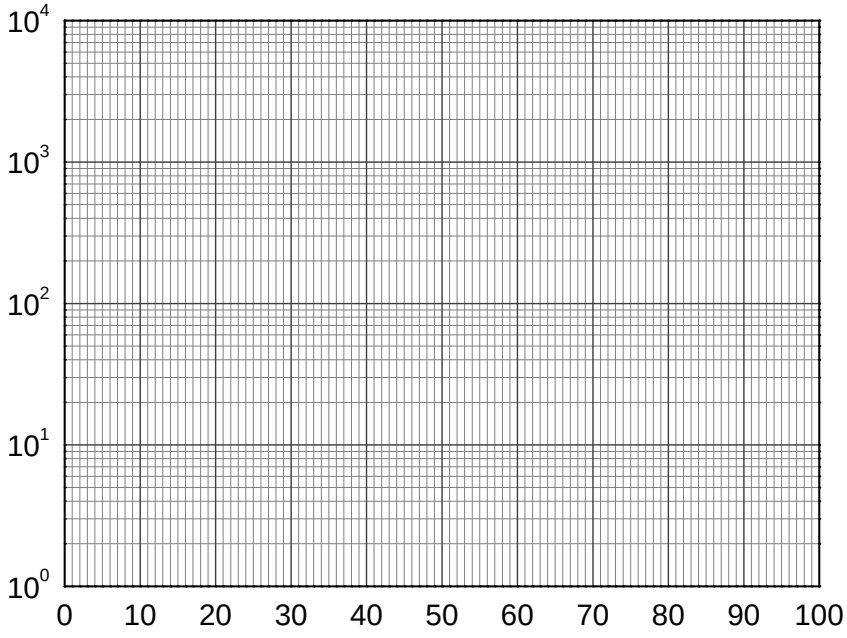


Figura 6.5: Esempio di sistema di coordinate in cui l'asse delle ascisse è in scala lineare e l'asse delle ordinate è in scala logaritmica in base dieci.

in cui abbiamo riportato il punto $x = 10$; la stessa cosa per 10^{-2}, sarà alla sinistra del punto corrispondente a $x = 1$ a distanza doppia rispetto al segmento tra $x = 1$ e $x = 10$. La stessa cosa succede se ci spostiamo dal punto $x = 2$ al punto $x = 20$, o da $x = 3$ a

$x = 30$, o da $x = 40$ a $x = 400$, ci spostiamo sempre di una decade. In pratica, in una scala logaritmica spostarsi di segmenti uguali corrisponde a far variare la variabile sempre dello stesso fattore.

6.4.2 Funzioni linearizzabili

Legge di potenza

Consideriamo la funzione

$$y = A\, x^n \,. \tag{6.18}$$

Il grafico in scala lineare di tale funzione non è una retta. Vediamo cosa succede se usiamo una scala log-log. Facendo il logaritmo di entrambi i membri dell'Equazione (6.18), otteniamo

$$\log y = \log A + n \log x \,, \tag{6.19}$$

che diventa l'equazione di una retta, se indichiamo $Y = \log y$, $Y_0 = \log A$ e $X = \log x$,

$$Y = Y_0 + nX \,, \tag{6.20}$$

con coefficiente angolare n e intercetta $Y_0 = \log A$. Il procedimento di linearizzazione passando ai logaritmi ha trasformato la legge di potenza in una relazione lineare.

Lo stesso risultato può essere ottenuto riportando entrambe le variabili x e y in scala logaritmica, in quanto è la stessa scala che calcola il logaritmo. Anche in questo caso, otteniamo una retta di coefficiente angolare n e intercetta A, che è uguale al valore della variabile dipendente y corrispondente al valore della variabile dipendente $x = 1$ (in quanto, $\log 1 = 0$).

Dalla precedente discussione risulta che l'uso della scala log-log è molto utile per capire se due grandezze sono legate tra loro da una legge di potenza, permettendo di trovare facilmente i valori dei parametri n e A.

In Figura 6.6, le linee sono degli esempi di leggi di potenza rappresentate in scala log-log. Il valore del parametro A si può subito determinare perché corrisponde all'ascissa $x = 1$. In generale, per trovare il valore di n, si devono individuare due punti di coordinate $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ e determinare n nel seguente modo

$$n = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{\log(y_2/y_1)}{\log(x_2/x_1)} \,. \tag{6.21}$$

Nella Figura 6.6, il coefficiente angolare della retta individuata è $n = 1.5$, calcolato con il metodo appena descritto. Per tutte le altre rette, ovviamente si può fare la stessa cosa

ma si vede subito che a una variazione di un certo numero intero di decadi in ordinata corrisponde una variazione di un numero intero di decadi in ascissa e questo permette di calcolare i corrispondenti valori di n semplicemente guardando il grafico; per esempio, guardando la retta con coefficiente angolare più grande, si vede che a una variazione di una decade (cioè un fattore 10) dell'ascissa corrisponde una variazione di 2 decadi (un fattore 100) in ordinata, poiché $100 = 10^2$ sarà $n = 2$. Lo stesso procedimento può essere utilizzato per le altre funzioni, ottenendo i risultati riportati in Figura 6.6.

In conclusione di questo paragrafo, possiamo dire che se due variabili sono legate da una legge di potenza l'uso della rappresentazione in scala logaritmica di entrambe le variabili dà come risultato una retta. Se facciamo un esperimento e vogliamo capire se le due grandezze fisiche che abbiamo misurato sono legate da una legge di potenza, basta rappresentarle in scala log-log e vedere se i dati si dispongono lungo una retta. Ovviamente, se rappresentiamo dei punti sperimentali la retta che individuiamo non sarà unica; certamente, possiamo trovare una retta limite con pendenza massima e una retta limite con pendenza minima, da cui possiamo determinare il valore di n e di A e gli errori a essi associati.

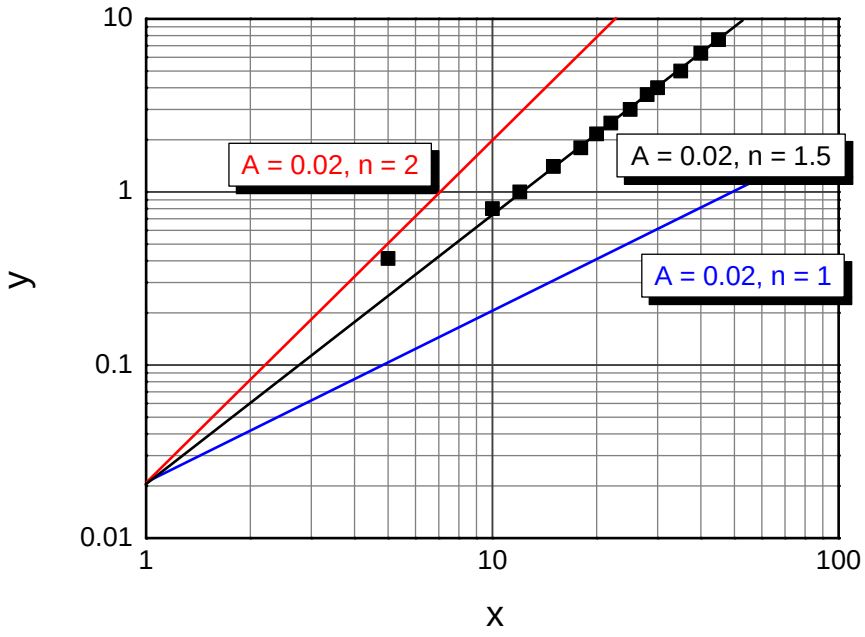


Figura 6.6: Andamento di alcune leggi di potenza rappresentate in scala log-log; i quadratini rappresentano punti sperimentali (che si suppone siano risultati sperimentali con errori paragonabili alla dimensione dei simboli).

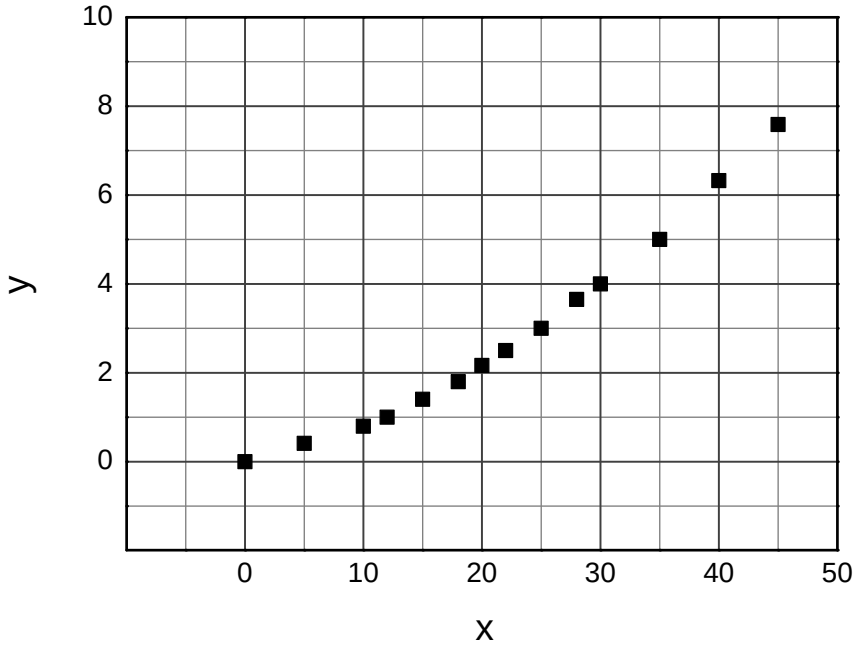


Figura 6.7: Gli stessi punti del grafico di Figura 6.6 riportati in scala lineare.

Legge esponenziale

La scala semi-logaritmica è molto usata in fisica perché molti fenomeni fisici, i cosiddetti fenomeni transitori, seguono una legge del tipo $A = A_0 e^{-t/\tau}$ oppure $A = A_0(1 - e^{-t/\tau})$. Si tratta di tutti quei casi in cui un sistema fisico viene portato fuori dall'equilibrio a causa di una brusca perturbazione esterna. Il sistema si riporterà nuovamente all'equilibrio con un tempo caratteristico τ. Questi fenomeni seguono una legge del tipo:

$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = -\alpha f(t)\,, \tag{6.22}$$

che ha per soluzione la seguente funzione

$$f(t) = Ae^{-\alpha t}\,. \tag{6.23}$$

Consideriamo una generica funzione

$$y = Ae^{-\alpha x}\,, \tag{6.24}$$

se facciamo i logaritmi di entrambi i membri otteniamo

$$\ln y = \ln A - \alpha\ x\,.$$

Applicando il procedimento di linearizzazione e riportando in un grafico lineare in ordinata $\ln y$ e in ascissa x, troveremo una retta di pendenza $-\alpha$ e di intercetta A di equazione:

$$Y = Y_0 - \alpha\ x\,,$$

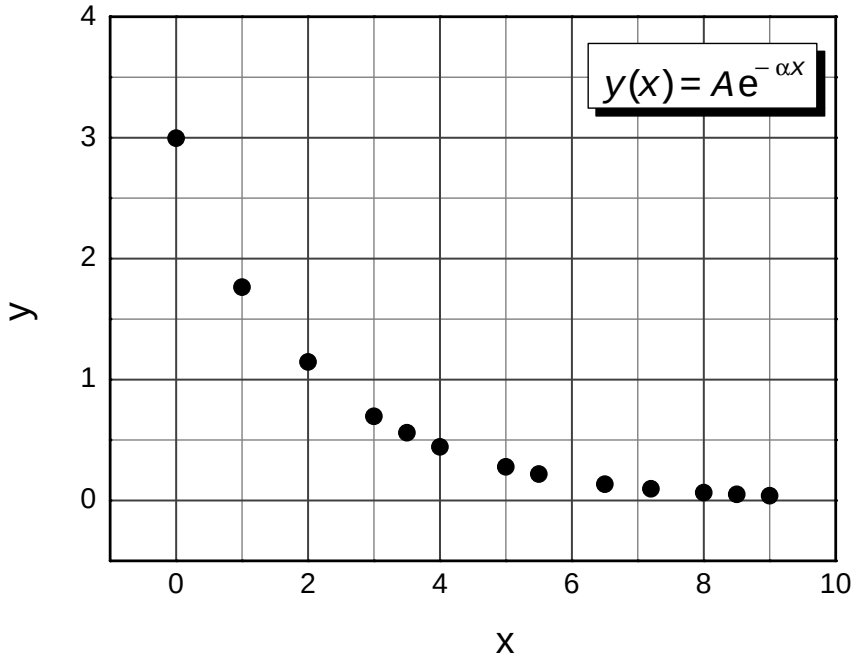


Figura 6.8: La funzione $y = 3e^{-0.5x}$ rappresentata in scala lineare.

dove $Y = \ln y$ e $Y_0 = \ln A$. Analogamente, usando un sistema di assi cartesiani in cui l'asse delle ordinate è in scala logaritmica e l'asse delle ascisse è in scala lineare, e cioè usando una scala semi-log, la funzione esponenziale diventa una funzione lineare. In Figura 6.8 e 6.9 sono riportati due grafici di una funzione esponenziale, rispettivamente in scala lineare e in scala semi-logaritmica.

Il valore di A lo troviamo subito dall'intercetta, $A = 3$; questo si può vedere da entrambi i grafici: l'ordinata corrispondente a $x = 0$ è 3. La pendenza della retta, che indichiamo con m, la troviamo prendendo due punti di coordinate $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ e calcolando il seguente rapporto

$$m = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\ln(y_2/y_1)}{x_2 - x_1}\,, \tag{6.25}$$

qualunque siano i punti che prendiamo, troviamo $n = -0.5$; quindi, se ci riferiamo alla funzione (6.24), troviamo $\alpha = 0.5$. È da notare che, nonostante abbiamo usato una scala logaritmica in base dieci, poiché la funzione è del tipo $f(x) = e^{kx}$, per trovare k dobbiamo calcolare il logaritmo neperiano; se la funzione fosse stata del tipo $f(x) = 10^{kx}$ dovevamo calcolare i logaritmi in base 10. Usare una scala logaritmica in base 10 è comodo per individuare le ordinate dei punti; se usassimo una scala logaritmica in base e, a segmenti uguali corrisponderebbero fattori uguali di e, rendendo il grafico meno "leggibile".

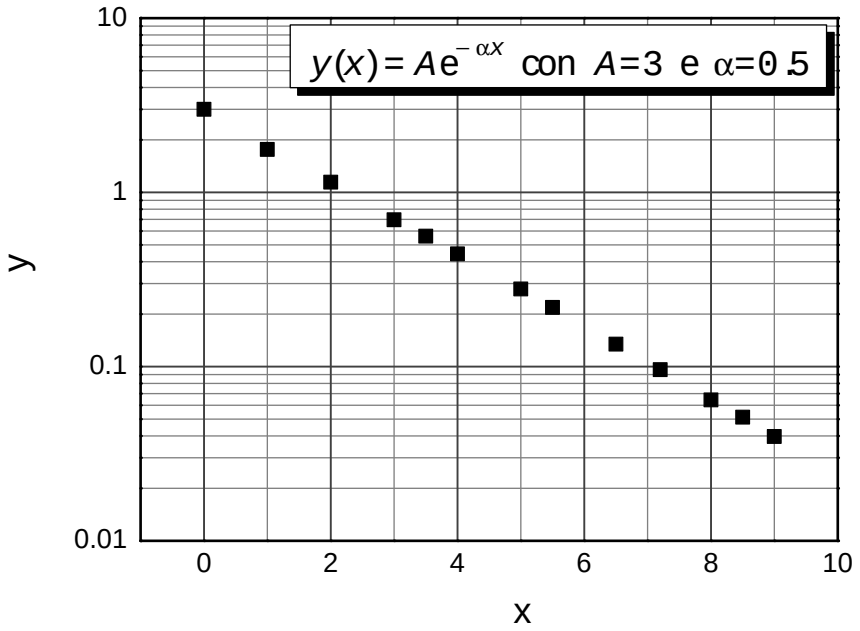


Figura 6.9: La stessa funzione $y = 3e^{-0.5x}$ rappresentata in scala semi-log, con l'ascissa in scala lineare e l'ordinata in scala logaritmica.

Considerazioni sugli errori nei grafici in scala logaritmica

Finora abbiamo considerato funzioni analitiche; come sappiamo, se rappresentiamo punti sperimentali a ogni punto nel grafico sarà associato un errore (o 2 se entrambe le variabili x e y hanno un errore non trascurabile). Per rappresentare gli errori nel grafico, basta segnare un segmento che unisce il valore minimo e il valore massimo. Tuttavia, dobbiamo fare alcune considerazioni. Se una variabile è affetta da un errore assoluto sempre uguale, allora la lunghezza del segmento che individua l'errore in scala lineare sarà sempre la stessa; in scala logaritmica, non sarà così, il segmento sarà più lungo per valori piccoli della grandezza e più corto per valori grandi: a segmenti uguali corrispondono fattori uguali e non differenze uguali. Al contrario, se una variabile è affetta da un errore relativo sempre lo stesso, allora il segmento che individua l'errore nella scala logaritmica avrà sempre la stessa lunghezza, in quanto l'errore relativo è definito come $\delta x/|x|$ e quindi per valori grandi di x si hanno anche valori grandi di δ_x ma il loro rapporto è sempre lo stesso e pertanto il segmento che rappresenta l'errore ha la stessa lunghezza qualunque sia il valore della grandezza x.

Esempio 6.3. Vogliamo verificare se due grandezze sono legate da una relazione di proporzionalità inversa e determinare la costante di proporzionalità. Supponiamo che l'errore

su x sia il 5% del valore misurato e quello su y sia 0.05, costante in tutto l'intervallo di valori misurati. I dati sono riportati nella tabella seguente.

Tabella 6.3: Tabella dei dati.

x	δx	y	δy
2.0	0.10	5.00	0.05
4.1	0.2	2.50	0.05
7.8	0.4	1.25	0.05
16.4	0.8	0.65	0.05
31.8	1.6	0.30	0.05
65	3	0.15	0.05

Innanzitutto, vediamo cosa ci dobbiamo aspettare. Se $y = kx^{-1}$, in scala log-log dovremmo ottenere una retta di pendenza -1, inoltre l'ordinata del punto $x = 1$ ci darà il valore di k.

In Figura 6.10, sono riportati i dati in scala log-log. Notiamo che le barre che individuano l'errore sulla x hanno tutte le stesse dimensioni, in quanto l'errore relativo sulla x è lo stesso per tutti i valori di x; al contrario, poiché i valori della y hanno errori assoluti costanti, i segmenti che individuano l'errore sulla y sono più grandi per valori più piccoli della y.

Dalle rette di massima e minima pendenza mostrate in Figura 6.10, prendiamo due punti, per semplicità possiamo prendere i punti estremi cioè $P_1 \equiv (1; 11.56)$ e $P_2 \equiv (80; 0.1)$, per la retta di massima pendenza, e $P_3 \equiv (1; 9)$ e $P_4 \equiv (134; 0.1)$ per quella di minima pendenza. Dai valori delle coordinate di questi punti, calcoliamo la pendenza massima

$$m_{max} = \frac{\log y_2/y_1}{\log x_2/x_1} \approx -1.08\,, \tag{6.26}$$

quella minima

$$m_{min} = \frac{\log y_4/y_3}{\log x_4/x_3} \approx -0.92 \tag{6.27}$$

e quindi il valore *best* $m = 1.00 \pm 0.08$.

Infine, calcoliamo la costante k come

$$k = \frac{y_1 + y_3}{2} \pm \frac{y_3 - y_1}{2} = 10.3 \pm 1.3\,. \tag{6.28}$$

Dai risultati ottenuti possiamo concludere che le due grandezze sono legate da una legge di proporzionalità inversa.

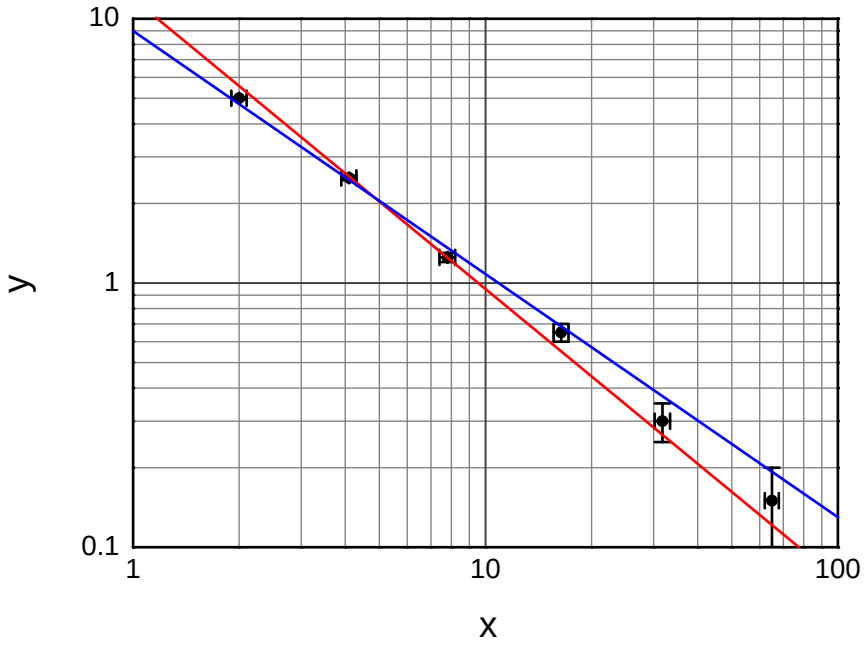


Figura 6.10: Rappresentazione in scala log-log dei dati di Tabella 6.3; nel grafico sono mostrate le rette di massima e minima pendenza.

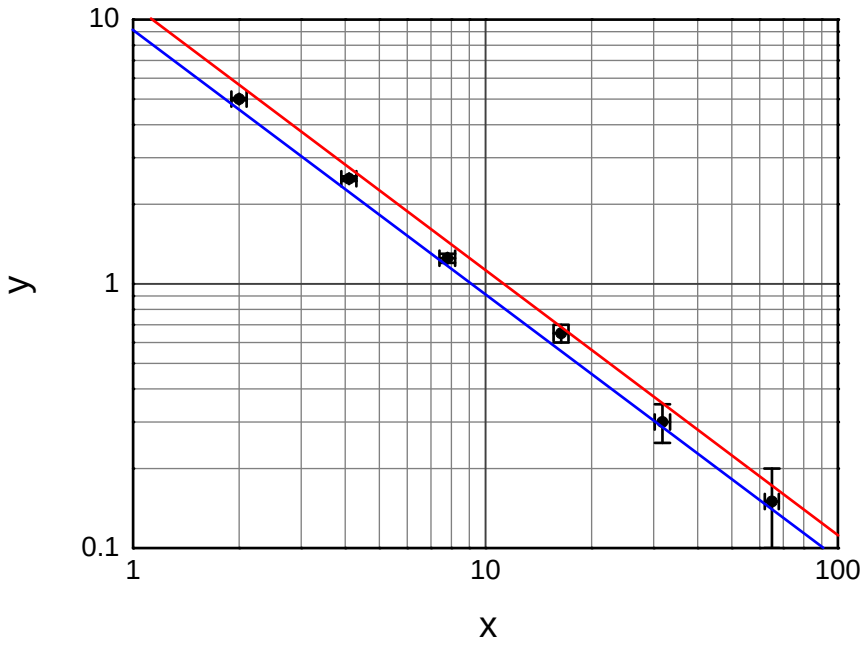


Figura 6.11: Rappresentazione in scala log-log degli stessi dati di Figura 6.10, dove abbiamo disegnato due rette entrambe di pendenza -1 che passano per tutti i punti sperimentali.

Verificato che le due grandezze sono legate da una legge di proporzionalità inversa, soprattutto se la legge fisica che lega le due grandezze è ben nota, possiamo analizzare

nuovamente i risultati ottenuti per ridurre l'indeterminazione del valore diella costante k. Per fare ciò, tracciamo due rette di pendenza -1 che toccano tutte le barre di errore dei punti, come mostrato in Figura 6.11. Prendendo le due intercette limite, vediamo che esse sono più vicine tra loro; in particolare, se facciamo la media dei due valori otteniamo $k = 10.1 \pm 0.6$, con una indeterminazione su k metà di quella calcolata precedentemente.

Queste ultime considerazioni ci fanno capire che nell'analisi dei dati sperimentali è sempre opportuno sfruttare tutte le informazioni "certe" che abbiamo. L'analisi dei dati effettuata in Figura 6.10 ci serve da una parte come verifica, dall'altra per capire quanto sia adeguato e preciso il metodo sperimentale seguito.

6.5 Proposte di esperienze di laboratorio

Dopo aver affrontato il problema dell'analisi grafica dei dati sperimentali, possono essere eseguite delle esperienze di laboratorio mirate al consolidamento di questi concetti. Qui di seguito ne proponiamo alcune.

Misura della densità di solidi omogenei di forma regolare

Avendo a disposizione almeno cinque oggetti di forma regolare, determinate la densità del materiale di cui sono costituiti gli oggetti, nell'ipotesi che tutti gli oggetti siano omogenei e cioè costituiti dallo stesso materiale.

Strumentazione

Calibro ventesimale. Il calibro ventesimale consente di misurare frazioni di millimetro e ha una risoluzione $r = 0.05$ mm; per la tipologia di strumento di misura, si assume un errore strumentale (errore di lettura più errore di precisione) pari a $\delta_x = 0.05$ mm.

Bilancia digitale. La bilancia digitale ha un errore di lettura di una unità sull'ultima cifra significativa (LSD), a cui corrisponde un errore $\delta_m = 0.1$ g; l'errore di precisione della bilancia è 0.2% del valore misurato. Pertanto, l'errore complessivo, espresso in grammi, è

$$\delta_m = \frac{0.2}{100} \times \text{V.M.} + 0.1\,.$$

Procedimento

a) Con il calibro ventesimale, misurate le dimensioni degli oggetti e stimate l'errore associato a ciascuna di esse.

b) Con la bilancia digitale, misurate la massa, m, dei singoli oggetti e stimate la sua indeterminazione.

c) Dai dati ottenuti al punto (a), determinate il volume, V, dei singoli oggetti e la corrispondente indeterminazione.

d) Riportate i valori della massa e del volume, con i relativi errori, in una tabella (rappresentazione tabellare).

e) Fate un grafico in scala lineare di m in funzione di V (rappresentazione grafica); con il metodo della retta di minima e massima pendenza, stimate il valore migliore della densità e l'errore a essa associato.

f) Commentate i risultati ottenuti.

Misura della costante elastica di una molla elicoidale

Avendo a disposizione un sistema massa-molla, determinate la costante elastica della molla elicoidale, con il metodo statico, assumendo che il sistema segua la legge di Hooke:

$$F_e = -k\ x\,,$$

dove F_e è la forza elastica esercitata dalla molla, k la costante elastica e x la deformazione della molla.

Strumentazione

Riga graduata. La riga graduata per misure lineari è di classe II e ha due differenti scale con risoluzione: 0.5 mm e 1 mm. L'errore di precisione della riga graduata, espresso in mm, è dato da:

$$\delta_{x\ prec.} = 0.3 + \frac{0.2}{1000} \times \text{V.M.}$$

L'errore nella misura dell'allungamento della molla è dato quindi dalla somma dell'errore di precisione della riga e dell'errore di lettura della scala usata.

Bilancia digitale. La bilancia digitale ha un errore di lettura di una unità sull'ultima cifra significativa (LSD), a cui corrisponde un errore $\delta_m = 0.1$ g; l'errore di precisione della bilancia è 0.2% del valore misurato. Pertanto, l'errore complessivo, espresso in grammi, è

$$\delta_m = \frac{0.2}{100} \times \text{V.M.} + 0.1\,.$$

Procedimento

Posizionare l'oscillatore armonico verticalmente, con un treppiedi. Per la misura della forza esercitata sulla molla, misurare il valore delle masse con la bilancia digitale e assumere $g = 9.80$ m/s^2 con errore trascurabile.

Per l'analisi dei dati procedete nel seguente modo.

a) Per ciascuna massa, calcolate il valore della forza corrispondente e misurate la lunghezza della molla allungata e riportate i dati acquisiti in una tabella (rappresentazione tabellare).

b) Riportate in un grafico in scala lineare i valori della forza in funzione della lunghezza della molla (rappresentazione grafica).

c) Con il metodo della retta di minima e massima pendenza, determinate graficamente il valore della costante elastica della molla e la sua indeterminazione.

d) Commentate i risultati ottenuti.

6.6 Esercizi

Esercizio 6.1. Si vuole determinare la relazione funzionale tra due grandezze fisiche, le cui misure sono riportate nella seguente tabella.

$N.$	x	y	δ_y
1	1	50	5
2	7	100	5
3	9	120	10
4	11	130	10
5	17	180	10

Riportare in un grafico log-log i risultati sperimentali e determinare graficamente i parametri funzionali e la loro indeterminazione.

$[m = 8.3 \pm 0.6;\ q = 40 \pm 5.]$

Esercizio 6.2. Uno studente misura la corrente elettrica che attraversa un componente elettrico al variare della tensione a cui il componente è sottoposto, ottenendo i valori riportati nella tabella seguente. Riportare in grafico i risultati ottenuti e dire se la legge $V = f(I)$ che lega la tensione e la corrente è una legge lineare.

$\boldsymbol{V}$ (V)	$\boldsymbol{\delta_V}$ (V)	$\boldsymbol{I}$ (A)	$\boldsymbol{\delta_I}$ (mA)
2.00	0.10	100	10
2.00	0.10	100	10
4.00	0.10	120	10
6.00	0.10	150	5
8.00	0.10	168	5
10.00	0.10	182	5

Esercizio 6.3. Determinare la retta che meglio si adatta ai dati sperimentali dell'Esercizio 6.2, usando il metodo grafico. Imporre il passaggio delle rette per l'origine degli assi cartesiani.

Esercizio 6.4. Si vuole determinare la costante elastica di una molla elicoidale. Per fare ciò si applica una forza F e si misura di quanto si allunga la molla, ottenendo i risultati riportati nella seguente tabella. Determinare con il metodo grafico la migliore stima della

$\boldsymbol{F}$ (N)	$\boldsymbol{x}$ (mm)	$\boldsymbol{\delta_x}$ (mm)
0	0	
0.20	39	2
0.30	59	2
0.40	78	2
0.50	98	2

costante elastica della molla e l'errore associato. Gli errori nelle misure della forza si possono considerare trascurabili.

Esercizio 6.5. Determinare i coefficienti della retta che meglio si adatta ai dati sperimentali dell'Esercizio 6.4, usando il metodo dei minimi quadrati.

6.7 Quesiti

Quesito 6.1. Quale curva rappresentata in Figura 6.12 descrive una legge quadratica?

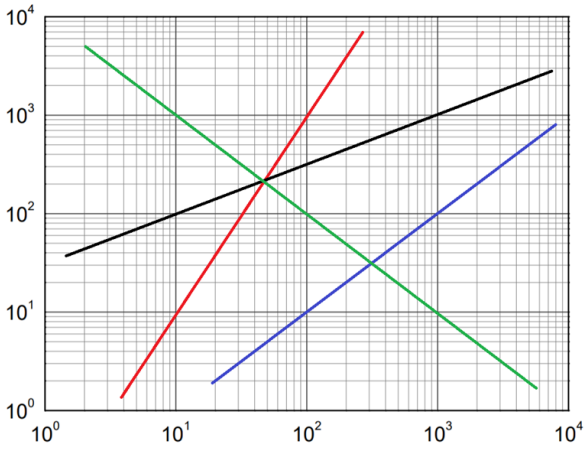


Figura 6.12: Grafici di funzioni descritte da una legge di potenza.

a. Curva nera
b. Curva rossa
c. Curva verde
d. Curva blu
e. Nessuna curva

[e. Curva rossa]

Capitolo 7

Analisi statistica degli errori casuali

Indice

7.1 Diagrammi a barre e istogrammi 112

7.2 Distribuzione limite 118

7.3 Proposte di esperienze di laboratorio 124

7.3.1 Distribuzione statistica delle lunghezze di un campione di chiodi 124

7.3.2 Misura del periodo di oscillazione di un oscillatore armonico semplice 125

7.4 Esercizi 126

7.5 Quesiti 127

Nel Capitolo 6, abbiamo visto che se in una misurazione gli errori casuali sono più piccoli di quelli strumentali allora ripetendo la misurazione otterremo sempre lo stesso risultato. Nello stesso capitolo, abbiamo visto anche come affrontare questa situazione e come analizzare i dati sperimentali. Se invece gli errori casuali sono più grandi degli errori strumentali, ogni volta che effettuiamo la misurazione otterremo un valore diverso. In questo caso, quando è possibile ripetere la misurazione è sempre conveniente acquisire più misure della stessa grandezza nelle stesse condizioni sperimentali. Il primo problema che sorge quando si hanno più misure della stessa grandezza è quello di trovare un modo conveniente di analizzare e riportare i valori ottenuti. Nel paragrafo seguente, descriveremo un metodo conveniente per fare ciò.

7.1 Diagrammi a barre e istogrammi

Quando gli errori casuali non sono trascurabili, si ha che misurando ripetutamente nelle stesse condizioni sperimentali una stessa grandezza fisica si ottengono risultati diversi l'uno dall'altro. Per esempio, se misuriamo il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro digitale, ci accorgiamo subito che ripetendo parecchie volte le misurazioni otteniamo sempre un valore diverso. Questa variabilità dei valori del periodo di oscillazione può essere messa in evidenza se riportiamo le misure in un opportuno grafico. Vediamo come fare ciò con un esempio.

Supponiamo di misurare la lunghezza x di dieci matite simili e ottenere i seguenti valori (tutti in mm)

$$156 \quad 154 \quad 156 \quad 158 \quad 153 \quad 154 \quad 155 \quad 154 \quad 154 \quad 155 \tag{7.1}$$

Scritti in questo modo, questi dieci numeri sono scarsamente istruttivi. Se registrassimo molte più misure in questo modo, il risultato sarebbe una serie di numeri senza nessuna evidente caratteristica. Ovviamente, occorre trovare un sistema migliore per riportare i risultati delle misurazioni fatte. Come primo passo, possiamo riorganizzare i numeri riportati nella (7.1) in ordine crescente

$$153 \quad 154 \quad 154 \quad 154 \quad 154 \quad 155 \quad 155 \quad 156 \quad 156 \quad 158 \tag{7.2}$$

In seguito, piuttosto che registrare le quattro letture 154, 154, 154, 154, possiamo semplicemente registrare che abbiamo ottenuto il valore 154 quattro volte. In altre parole, possiamo registrare i diversi valori di x ottenuti, insieme con il numero di volte in cui ciascun valore è stato trovato, come mostrato in Tabella 7.1.

Tabella 7.1: Disposizione dei valori (7.1) in un'apposita tabella.

Diversi valori, x_i	153	154	155	156	157	158
Numero di volte, n_i	1	4	2	2	0	1

Per costruire la tabella dei dati, abbiamo introdotto per la variabile indipendente la notazione x_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$ per denotare i valori trovati: $x_1 = 153$, $x_2 = 154$, $x_3 = 155$, e così via; n_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$ per denotare il numero di volte in cui il corrispondente valore x_i è stato trovato: $n_1 = 1$, $n_2 = 4$ e così via.

Se registriamo le misure come in Tabella 7.1, allora possiamo riscrivere la definizione della media aritmetica $\overline{x}$ in un modo più conveniente. Dalla nostra vecchia definizione sappiamo che

$$\overline{x} = \frac{153 + 154 + 154 + 154 + 154 + 155 + \cdots + 158}{10} \tag{7.3}$$

e questo è lo stesso di

$$\overline{x} = \frac{153 + (154 \times 4) + (155 \times 2) + (156 \times 2) + 158}{10}\,; \tag{7.4}$$

in generale, possiamo quindi scrivere

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_i n_i}{n} = \frac{\sum_i x_i n_i}{\sum_i n_i}\,, \tag{7.5}$$

dove n è il numero totale di misurazioni. Calcolando la media usando l'Equazione (7.3), noi sommiamo tutte le misure fatte; usando, invece, l'Equazione (7.4), o in generale la (7.5), sommiamo tutti i diversi valori ottenuti, moltiplicando ciascun valore per il numero di volte che è stato ottenuto. Ovviamente, queste due somme danno lo stesso risultato, ma l'Equazione (7.5) risulta essere più utile quando abbiamo un grande numero di misure. La somma (7.5) è la media pesata (già introdotta nel Par. 5.3): ciascun valore x_i viene "pesato" per il numero di volte di occorrenza n_i. Nell'Equazione (7.5) abbiamo sostituito $\sum_i n_i = n$, in quanto che se sommiamo tutti i numeri n_i, otteniamo il numero totale n di misure fatte.

I concetti che abbiamo appena visto possono essere espressi in un modo più conveniente. Invece di dire che il risultato $x = 154$ è stato ottenuto quattro volte, possiamo dire che $x = 154$ è stato ottenuto 4 volte su 10 misurazioni, ossia è stato ottenuto in 4/10 di tutte le nostre misure. In altre parole, invece di usare la *frequenza assoluta* n_i, il numero di volte in cui si ottiene il risultato x_i, introduciamo la *frequenza relativa* $F_i = n_i/n$ che è il rapporto tra le n_i misurazioni che hanno dato il risultato x_i e il numero totale di misure n. La frequenza relativa F_i specifica la distribuzione dei nostri risultati, dal momento che descrive come le nostre misure sono distribuite fra i diversi possibili valori.

In termini della frequenza relativa F_i, possiamo riscrivere l'Equazione (7.5) per la media $\overline{x}$ nella forma compatta

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_i n_i}{n} = \sum_i x_i \frac{n_i}{n} = \sum_i x_i F_i\,. \tag{7.6}$$

Cioè, la media $\overline{x}$ è proprio la somma pesata di tutti i diversi valori x_i ottenuti, con ciascun x_i pesato da F_i, cioè dalla frazione di volte in cui si ottiene il valore x_i. Il risultato (7.6) implica che

$$\sum_i F_i = \sum_i \frac{n_i}{n} = \frac{n}{n} = 1\,. \tag{7.7}$$

Cioè, se sommiamo le frazioni F_i per tutti i possibili risultati x_i, dobbiamo ottenere uno. Qualunque insieme di numeri la cui somma è uguale a uno è detta essere "normalizzata", mentre la relazione (7.7) è chiamata *condizione di normalizzazione*.

La distribuzione delle misure (7.1) può essere evidenziata graficamente in un particolare grafico, detto *diagramma a barre*, mostrato in Figura 7.1 e in Figura 7.2. Quest'ultimo è proprio un grafico di F_i in funzione di x_i, con i diversi valori misurati x_i riportati lungo l'asse delle ascisse e la frazione di occorrenza, in cui ciascun x_i è stato ottenuto, indicata dall'altezza della barra verticale disegnata sopra x_i. Dati riportati in grafici come questo possono essere compresi rapidamente e facilmente.

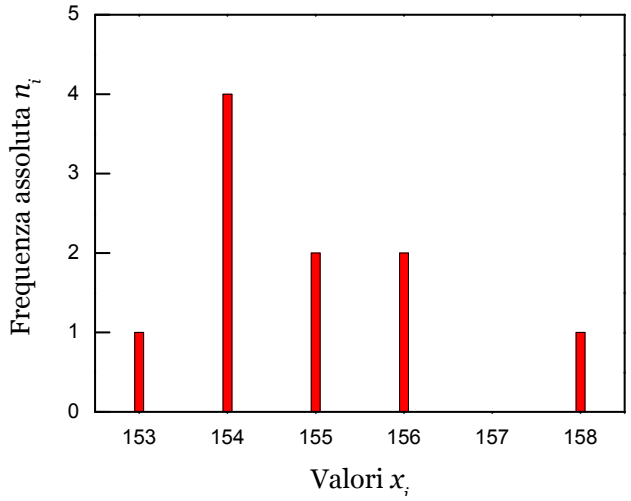


Figura 7.1: Diagramma a barre per le dieci misure (7.1) della lunghezza x; l'asse delle ordinate mostra la frequenza assoluta n_i in cui ciascun valore x_i è stato osservato.

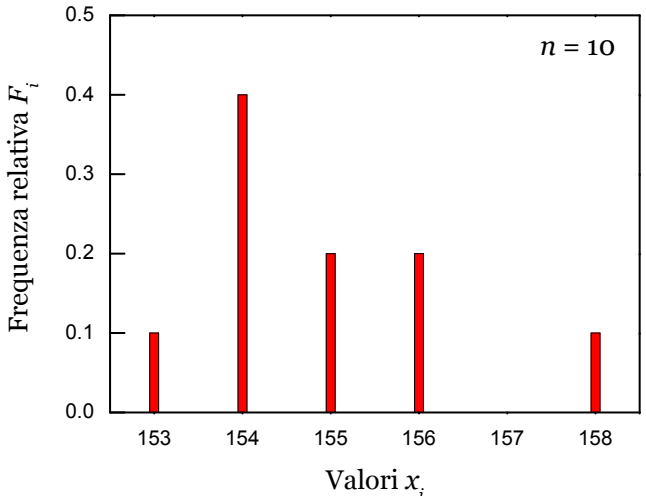


Figura 7.2: Diagramma a barre per le dieci misure (7.1) della lunghezza x; l'asse delle ordinate mostra la frequenza relativa F_i in cui ciascun valore x_i è stato osservato.

Se guardiamo i diagrammi a barre di Figura 7.1 e 7.2, vediamo subito che il valore maggiormente osservato è $x = 154$ mm. Questo valore di x è detto *moda* o *valore modale* dell'insieme di dati. In generale, la *moda* di un insieme di dati è il valore che si presenta con la massima frequenza.

I grafici come quelli in Figura 7.1 e 7.2 sono chiamati *diagrammi a barre*, dal momento che la distribuzione dei risultati è indicata dalle altezze delle barre verticali sopra gli x_i. Questo genere di grafici è appropriato quando i valori x_i sono ordinatamente spaziati; cioè la variabile x assume valori discreti.[1] Dal momento che la maggior parte delle grandezze fisiche può assumere valori continui, è più conveniente dividere la serie di valori in un numero "conveniente" di intervalli e di contare quanti valori cadono in ciascuno intervallo.[2] Per esempio, potremmo contare il numero di misure (7.1) comprese tra $x = 152$ e 153, e così via. È preferibile determinare il numero di misure che cadono in ciascun intervallo con il seguente criterio: $x_i \leq x < x_{i+1}$. I risultati di questo conteggio, mostrati in Tabella 7.2, possono essere messi in un opportuno grafico, detto *istogramma*, mostrato in Figura 7.3.

Tabella 7.2: Disposizione degli $n = 10$ valori (7.1) ordinati per intervalli. Il numero di misure che cadono in ciascun intervallo è stato determinato con il seguente criterio: $x_i \leq x < x_{i+1}$.

Intervallo (mm) Δ_i	**Frequenza ass.** n_i	**Frequenza rel.** $F_i = n_i/n$	**Densità di freq. (mm^{-1})** $f_i = F_i/\Delta_i$
$153 - 154$	1	0.1	0.1
$154 - 155$	4	0.4	0.4
$155 - 156$	2	0.2	0.2
$156 - 157$	2	0.2	0.2
$157 - 158$	0	0	0
$158 - 159$	1	0.1	0.1

In questo grafico, la frazione di misure che cadono in ciascun intervallo è indicata dall'area del rettangolo disegnato sopra l'intervallo. Così, il rettangolo ombreggiato sopra l'intervallo da $x = 152$ a $x = 153$ ha area $0.1 \times 1 = 0.1$, indicando che 1/10 di tutte le misure sono cadute in questo intervallo.

In generale, denotiamo la larghezza dell'intervallo *i-esimo* con Δ_i. (Di solito, gli intervalli hanno tutti la stessa larghezza ma non necessariamente). L'altezza f_i del rettangolo

[1] L'insieme dei valori che può assumere una variabile discreta può essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme dei numeri interi. L'insieme dei valori che può assumere una variabile continua può essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme dei numeri reali.

[2] In ambito statistico, gli intervalli vengono chiamati *classi*.

sopra questo intervallo è scelta in modo tale che l'area $f_i \times \Delta_i$ sia uguale alla frazione di misure che cadono nell'intervallo *i-esimo*; per questo motivo, f_i spesso è chiamata *densità di frequenza* e ha le dimensioni dell'inverso di quelle della grandezza riportate nell'asse delle ascisse. In altre parole, in un istogramma l'area $f_i \times \Delta_i$ del rettangolo *i-esimo* ha lo stesso significato dell'altezza F_i della barra *i-esima* in un diagramma a barre.[3]

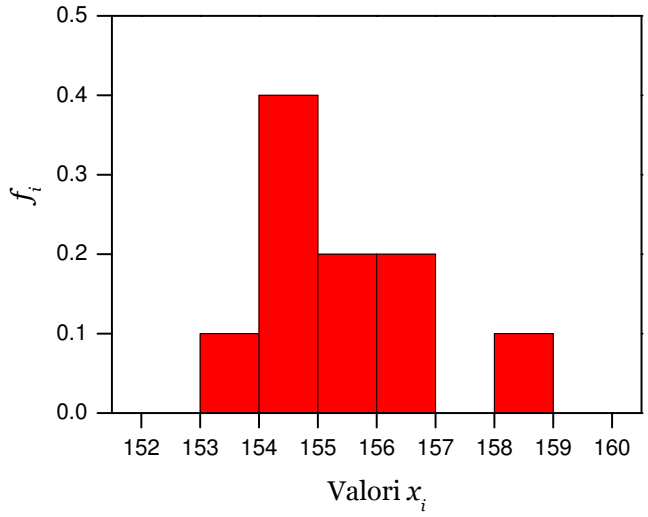


Figura 7.3: Istogramma per le dieci misure (7.1) della lunghezza x. L'asse delle ordinate indica il valore di f_i. Il prodotto $f_i \times \Delta_i$ è la frazione di misure che cadono nell'intervallo *i-esimo*. Il numero di misure che cadono in ciascun intervallo è stato determinato con il seguente criterio: $x_i \leq x < x_{i+1}$.

Un po' di attenzione è necessaria nella scelta della larghezza degli intervalli Δ_i per un istogramma. Se gli intervalli sono troppo larghi, allora tutte le misure cadranno in un solo intervallo e l'istogramma sarà un singolo rettangolo privo di interesse. Se gli intervalli sono troppo stretti, allora pochi di essi conterranno più di un valore e l'istogramma consisterà di un grande numero di stretti intervalli tutti circa della stessa altezza. Chiaramente, la larghezza dell'intervallo deve essere scelta in modo tale che vi siano parecchie misure in ciascuno degli intervalli. Così, quando il numero totale di misure n è piccolo, dovremmo scegliere i nostri intervalli relativamente larghi; ma se aumentiamo il numero di misure n, allora è solitamente possibile scegliere intervalli più stretti. Secondo un criterio della teoria degli errori, di cui non diamo qui una giustificazione, che può essere utilizzato nei casi più comuni, il numero di intervalli di un istogramma non può essere minore di quattro e deve includere almeno 5 valori; quindi, per costruire un istogramma significativo,

[3]Spesso, il diagramma a barre e l'istogramma vengono chiamati, rispettivamente, *istogramma a barre* e *istogramma a intervalli*.

dal punto di vista statistico, è necessario avere almeno 20 misure. Nel caso in cui si hanno parecchie misure e si vuole costruire un istogramma con molti intervalli, si possono scegliere intervalli sempre più piccoli fino a che la loro larghezza non sia inferiore a due volte l'errore strumentale.[4] Nel nostro caso, supponendo di avere misurato la lunghezza delle matite con un righello graduato in millimetri (mm), e quindi con un errore di lettura di 0.5 mm, un valore di Δ_i minore di 1 mm sarebbe stato privo di significato.

Esempio 7.1. Riportiamo i dati (7.1) in un istogramma, in cui la larghezza dell'intervallo è posta uguale a $\Delta_i = 2$ mm. Dapprima, raggruppiamo i dati come mostrato in Tabella 7.3

Tabella 7.3: Disposizione degli $n = 10$ valori (7.1) per intervalli di ampiezza $\Delta_i = 2$ mm.

Intervallo (mm) Δ_i	**Frequenza ass.** n_i	**Frequenza rel.** $F_i = n_i/n$	**Densità di freq. (mm^{-1})** $f_i = F_i/\Delta_i$
$152 - 154$	1	0.1	0.05
$154 - 156$	6	0.6	0.3
$156 - 158$	2	0.2	0.1
$158 - 160$	1	0.1	0.05

Successivamente, costruiamo l'istogramma che è riportato in Figura 7.4.

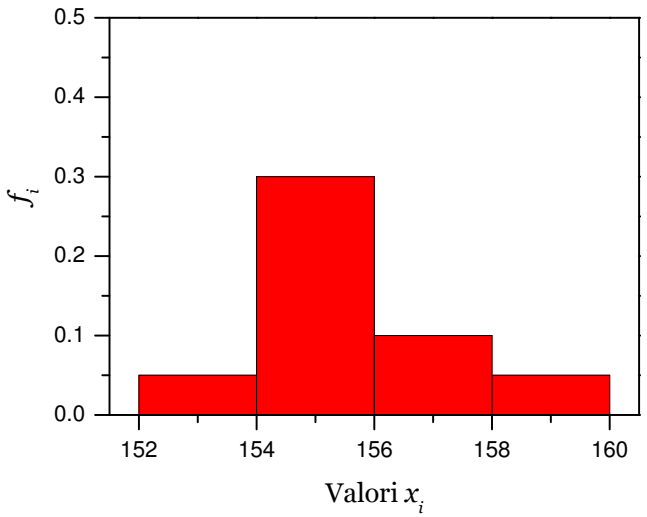


Figura 7.4: Istogramma per le dieci misure (7.1) della lunghezza x, con $\Delta_i = 2$ mm. Il numero di misure che cadono in ciascun intervallo è stato determinato con il seguente criterio: $x_i \leq x < x_{i+1}$.

[4] Vedi Capitolo 2.

Confrontando l'istogramma di Figura 7.4 con quello di Figura 7.3, si vede che aumentando Δ il numero di intervalli in cui cadono tutte le misure si riduce e l'istogramma si appiattisce; prendendo intervalli ancora più grandi, l'istogramma non sarà più significativo. In entrambi gli istogrammi, la somma delle aree degli intervalli è uguale a uno.

7.2 Distribuzione limite

Nella maggior parte degli esperimenti, se si aumenta il numero di prove, l'istogramma delle misure comincia ad assumere una qualche semplice forma definita. Quando il numero di misure è molto grande, la loro distribuzione si avvicina a qualche curva continua, come quella mostrata in Figura 7.5. La curva continua che si otterrebbe con un numero infinito di misure prende il nome di *distribuzione limite*. La distribuzione limite è una costruzione teorica, che non può mai essere ottenuta esattamente con un numero finito di misure. Più misurazioni facciamo, più il nostro istogramma si avvicinerà alla distribuzione limite. Ma soltanto se noi facessimo infinite misurazioni e usassimo intervalli infinitamente stretti, otterremmo realmente la distribuzione limite. Tuttavia, sperimentalmente si osserva che quasi tutte le misure presentano una distribuzione limite, alla quale il nostro istogramma si avvicina sempre più man mano che aumentiamo il numero di misurazioni. Una distribuzione limite, come la curva in Figura 7.5, definisce una funzione che chiamiamo semplicemente *funzione di distribuzione* e la indichiamo con $f(x)$. All'aumentare del numero di misure della grandezza x, il nostro istogramma diventerà sempre più indistinguibile dalla curva limite $f(x)$.

Ricordando la costruzione dell'istogramma, si ha che la frazione di misure che cadono in qualunque piccolo intervallo Δ_i è uguale all'area $f_i \times \Delta_i$. Quando l'intervallo Δ_i tende a zero e l'istogramma "tende" alla funzione limite $f(x)$, la frazione di misure che cadono nell'intervallo x e $x + \mathrm{d}x$ è uguale all'area $f(x)\mathrm{d}x$ della striscia ombreggiata mostrata in Figura 7.6, ottenuta moltiplicando il valore della funzione $f(x)$ per l'incremento infinitesimo $\mathrm{d}x$ della variabile x

$$f(x)\mathrm{d}x = (\text{frazione di misure che cadono tra } x \text{ e } x + \mathrm{d}x)\,. \tag{7.8}$$

Più in generale, si ha che il numero di misure che cadono tra due qualsivoglia valori a e b è uguale all'area sottesa al grafico tra $x = a$ e $x = b$, come mostrato in Figura 7.7. La frazione che cade fra $x = a$ e $x = b$ è l'area ombreggiata; quest'area è proprio l'integrale

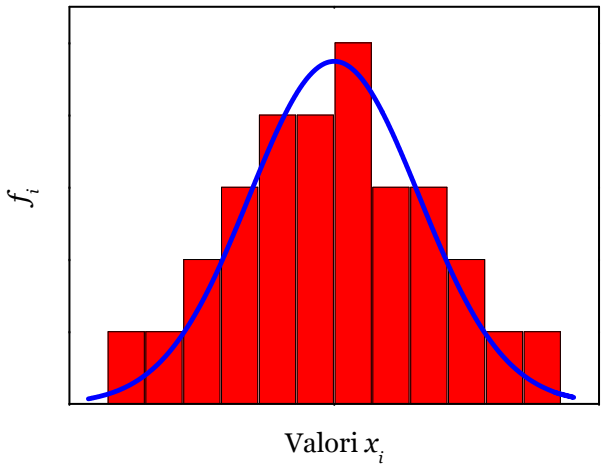


Figura 7.5: Istogramma per un numero elevato di misure della stessa grandezza. La curva continua rappresenta la distribuzione limite $f(x)$.

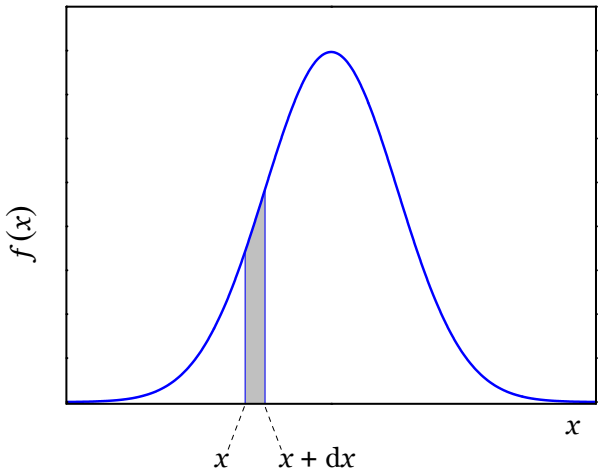


Figura 7.6: Una distribuzione limite $f(x)$; dopo molte misurazioni, la frazione di misure che cade tra x e $x + dx$ è data dall'area $f(x)dx$ della striscia ombreggiata sottesa alla curva $f(x)$.

definito di $f(x)$ tra $x = a$ e $x = b$. Così, abbiamo l'importante risultato che

$$\int_a^b f(x)dx = (\text{frazione di misure che cadono tra } x = a \text{ e } x = b)\,. \tag{7.9}$$

Le due affermazioni (7.8) e (7.9) indicano la frazione di misure che ci aspettiamo di trovare in qualche intervallo, dopo avere fatto un numero molto grande di misurazioni.

Se le misure sono state eseguite con elevata precisione, allora tutti i valori ottenuti saranno molto vicini al valore vero di x; così, l'istogramma dei risultati e quindi la distribuzione limite saranno stretti e piccati, come la curva continua in Figura 7.8. Se le misure

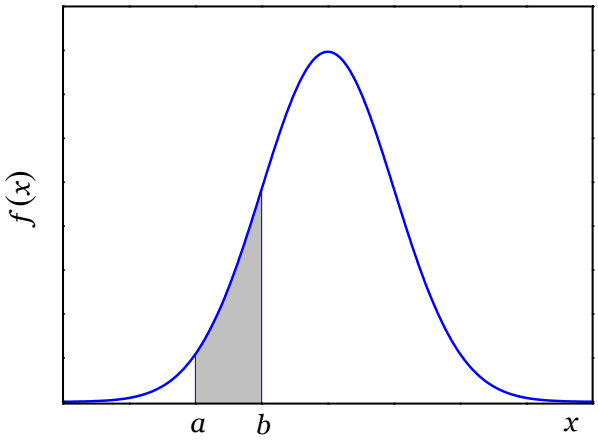


Figura 7.7: Una distribuzione limite $f(x)$; dopo molte misurazioni, la frazione di misure che cade fra $x = a$ e $x = b$ è data dall'area ombreggiata $f(x)\mathrm{d}x$ sottesa alla curva $f(x)$.

sono di bassa precisione, allora i valori trovati saranno sparpagliati, e la distribuzione sarà larga e bassa, come la curva tratteggiata in Figura 7.8.

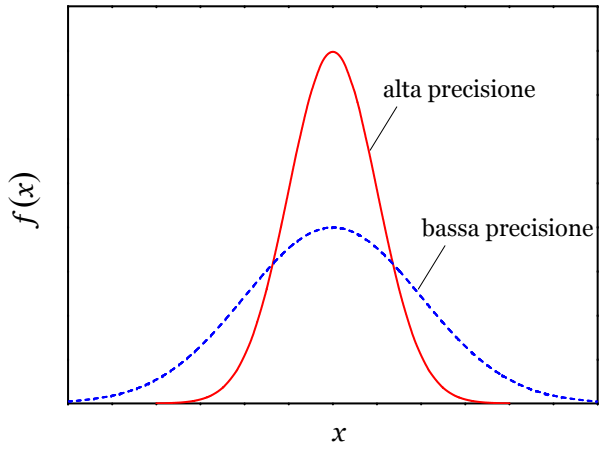


Figura 7.8: Due distribuzioni limite, una per misurazioni eseguite con elevata precisione, l'altra per misurazioni eseguite con bassa precisione.

La distribuzione limite $f(x)$, per la misura di una data grandezza x, utilizzando una data strumentazione, descrive come dovrebbero essere distribuiti i risultati dopo molte misure. Così, se conoscessimo $f(x)$, potremmo calcolare il valor medio $\overline{x}$ che si dovrebbe trovare dopo un numero elevato (tendente a ∞) di misurazioni. Abbiamo visto nella (7.6) che la media di qualunque numero di misure è la somma di tutti i diversi valori x_i,

ciascuno pesato per la frazione di volte in cui è stato ottenuto,

$$\overline{x} = \sum_i x_i F_i \,. \tag{7.10}$$

Nel presente caso, abbiamo un numero enorme di misure con distribuzione $f(x)$. Se dividiamo l'intero intervallo di valori in piccoli intervalli Δ_i compresi tra x_i e $x_i + \Delta_i$, allora la frazione di valori in ciascun intervallo è $F_i = f(x_i)\Delta_i$, e al limite per cui tutti gli intervalli vanno a zero, la (7.10) diventa

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x \,. \tag{7.11}$$

Ricordiamo che questa formula ci dà la media $\overline{x}$ attesa dopo un numero infinitamente grande di misurazioni.

Analogamente a quanto discusso sopra, possiamo calcolare la deviazione standard σ_x ottenuta dopo molte misurazioni. Quando $n \to \infty$, σ_x^2 è la media del quadrato degli scarti $(x - \overline{x})^2$. Così, esattamente le stesse argomentazioni che ci hanno portato alla (7.11), ci danno ora, dopo molte prove,

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x})^2 f(x) \mathrm{d}x \,, \tag{7.12}$$

da cui si ricava la deviazione standard $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$. Dall'equazione (7.12) si può ricavare una ulteriore espressione della varianza $Var(x)$. Sviluppando il quadrato del binomio $(x - \overline{x})^2 = x^2 + \overline{x}^2 - 2x\overline{x}$ e integrando si ottiene

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x + \overline{x}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x - 2\overline{x} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = Var(x) \,. \tag{7.13}$$

La larghezza della funzione di distribuzione può essere determinata anche con la cosiddetta *larghezza a metà altezza*, indicata con Γ, data dalla differenza fra i valori della x quando la $f(x)$ assume un valore pari a metà del suo valore massimo. Si utilizza anche la semi-larghezza a metà altezza data da $\Gamma/2$. Entrambe queste grandezze caratterizzano la dispersione della distribuzione dei dati.

Esempio 7.2. La distribuzione uniforme

Immaginiamo di fare ruotare, attorno all'asse verticale, una matita sopra un tavolo. A causa degli attriti, la matita si fermerà in una determinata posizione. Considerando la matita come un vettore orientato e i lati del tavolo come gli assi cartesiani, si potrà definire l'orientazione della matita dalla misura dell'angolo che essa forma rispetto all'asse positivo delle ascisse. Se ripetiamo l'esperimento osserveremo che la matita si fermerà in una

posizione differente dalla precedente. E così via, poiché è difficile imprimere alla matita sempre lo stesso momento meccanico, ripetendo l'esperimento otterremo sempre valori differenti dell'angolo θ formato dalla matita con un lato del tavolo preso come riferimento. Ripetendo tante volte questo esperimento, otteniamo valori dell'angolo compresi in un intervallo continuo di valori tra $-\pi$ e $+\pi$ radianti (–180° e +180°). La distribuzione limite dei risultati di queste misurazioni è mostrata in Figura 7.9 ed è descritta dalla seguente funzione:

$$f(\theta) = \begin{cases} f_0 & \text{per} \quad -\pi < \theta < \pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{7.14}$$

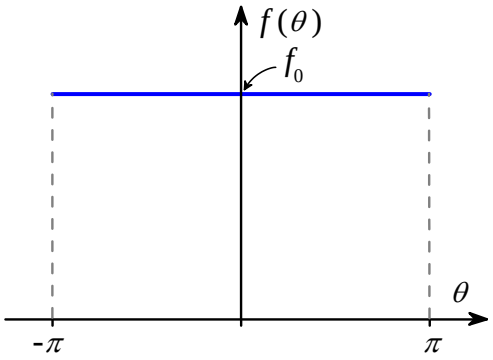


Figura 7.9: Distribuzione limite uniforme.

La costante di normalizzazione si determina imponendo che l'area sottesa alla curva sia uguale a uno. Quindi

$$2\pi f_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2\pi}\,. \tag{7.15}$$

Conoscendo la funzione di distribuzione $f(\theta)$, il valore medio si calcola come

$$\overline{\theta} = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}\theta = 0\,. \tag{7.16}$$

Per la simmetria della distribuzione, il valore medio atteso sarà $\overline{\theta} = 0$. La deviazione standard è data da:

$$\sigma_\theta^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} (\theta - \overline{\theta})^2 f(\theta)\, \mathrm{d}\theta\,. \tag{7.17}$$

Risolvendo l'integrale di sopra si ottiene $\sigma_\theta = \pi/\sqrt{3} \approx 1.8$ rad. Nel grafico di Figura 7.10 sono indicati $\overline{\theta}$ e σ_θ

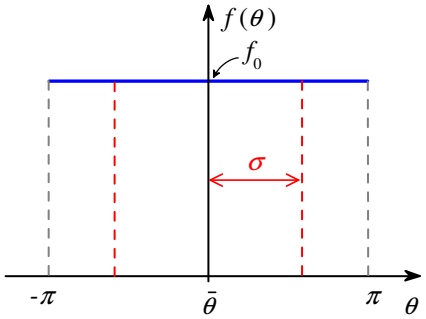


Figura 7.10: Distribuzione limite uniforme; nel grafico sono indicati il valore $\overline{\theta} = 0$ e $\sigma_\theta = \pi/\sqrt{3}$ rad.

Esempio 7.3. Misura del valore di π con il metodo Monte Carlo

Per stimare il valore di π si può sfruttare un metodo statistico, noto come *metodo Monte Carlo*.[5] Il metodo consiste nel lanciare un certo numero di freccette (dardi) su un bersaglio circolare di raggio R, inscritto in un quadrato di lato $2R$, come mostrato nella Figura 7.11. Si lanciano casualmente (senza prendere la mira!) le freccette contro il bersaglio e si valuta la probabilità che una di esse lo colpisca. Poiché sia la posizione orizzontale x sia la posizione verticale y del punto del bersaglio dove colpisce il dardo saranno presumibilmente distribuiti uniformemente, possiamo ragionevolmente assumere che la probabilità di colpire l'area racchiusa dal cerchio sarà data dal rapporto dell'area del cerchio e quella del quadrato

$$P = \frac{\text{area del cerchio}}{\text{area del quadrato}} = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4}\,. \tag{7.18}$$

Poiché le variabili x e y che determinano il punto sul bersaglio sono distribuite uniformemente, si può calcolare il rapporto tra l'area del cerchio e l'area del quadrato semplicemente calcolando il rapporto tra il numero di dardi che cadono dentro il quadrato (compreso il cerchio) e quelli che cadono dentro il cerchio. All'aumentare del numero di lanci, questo numero tenderà al valore di $\pi/4$, ma solo per un numero infinito di lanci il rapporto sarà uguale a $\pi/4$.

[5] Un metodo analogo è stato applicato dall'autore per determinare l'area della superfice irregolare di un elemento di piombo incastrato in un disco di legno; si veda: F. Aglione *et al*, Phys. Educ. **48** (2013) 137-139.

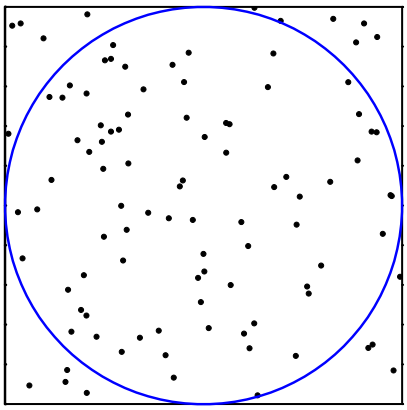


Figura 7.11: Bersaglio per il calcolo di π con il metodo Monte Carlo; i punti sono coppie di valori distribuiti uniformemente tra 0 e 1.

7.3 Proposte di esperienze di laboratorio

Dopo aver affrontato il problema della raccolta e rappresentazione grafica di dati sperimentali influenzati da errori casuali, può essere condotta l'esperienza di laboratorio descritta qui di seguito.

7.3.1 Distribuzione statistica delle lunghezze di un campione di chiodi

Misurare con un calibro ventesimale la lunghezza di un campione di chiodi prodotti dalla stessa fabbrica.

Strumentazione

Calibro ventesimale. Il calibro ventesimale consente di misurare frazioni di millimetro e ha una risoluzione $r = 0.05$ mm; per la tipologia di strumento di misura, si assume un errore strumentale (errore di lettura più errore di precisione) pari a $\delta_x = 0.05$ mm.

Procedimento

Ogni componente del gruppo misuri la lunghezza, ℓ, di 20 chiodi. (Decidete quante misure fare, in modo che ogni componente del gruppo faccia lo stesso numero di misure e ottenere complessivamente 100 misure).

a) Utilizzando i risultati ottenuti dal singolo componente del gruppo, costruite un istogramma normalizzato (rappresentazione grafica).

b) Dall'istogramma, ricavate il valore medio della lunghezza e la semi larghezza a mezza altezza dell'istogramma.

c) Calcolate analiticamente il valore medio e la deviazione standard direttamente dai dati.

d) Raccogliendo i dati ottenuti dai vari componenti del gruppo, fate un istogramma utilizzando l'intero set di dati.

e) Confrontate i risultati ottenuti con i due metodi nell'istogramma complessivo e nei singoli istogrammi, riportando in valori ottenuti in una tabella (rappresentazione tabellare).

f) Dall'analisi complessiva dei dati, ricavate la lunghezza dei chiodi e la corrispondente indeterminazione.

g) Con i valori di $\bar{\ell}$ e di σ_ℓ ottenuti, tracciate una curva di Gauss sovrapposta all'istogramma complessivo ottenuto al punto (d).

h) Commentate i risultati ottenuti.

7.3.2 Misura del periodo di oscillazione di un oscillatore armonico semplice

Avendo a disposizione un sistema massa-molla e un cronometro digitale (avente risoluzione $r = 0.01$ s), misurate il periodo di oscillazione dell'oscillatore.

Strumenti

Cronometro digitale. Cronometro digitale con risoluzione $r = 0.01$ s ed errore di precisione trascurabile.

Bilancia digitale. La bilancia digitale ha un errore di lettura di una unità sull'ultima cifra significativa (LSD), a cui corrisponde un errore $\delta_m = 0.1$ g; l'errore di precisione della bilancia è 0.2% del valore misurato. Pertanto, l'errore complessivo, espresso in grammi, è

$$\delta_m = \frac{0.2}{100} \times \text{V.M.} + 0.1$$

Procedimento

Ogni componente del gruppo misuri il tempo corrispondente a 10 oscillazioni e ripeta l'operazione almeno 20 volte. (Decidete quante misure fare, in modo che ogni componente del gruppo faccia lo stesso numero di misure e ottenere complessivamente 100 misure).

a) Utilizzando i risultati ottenuti dal singolo componente del gruppo, costruite un istogramma normalizzato (rappresentazione grafica).

b) Dall'istogramma, ricavate il valore medio della lunghezza e la semi larghezza a mezza altezza dell'istogramma.

c) Calcolate analiticamente il valore medio e la deviazione standard direttamente dai dati.

d) Raccogliendo i dati ottenuti dai vari componenti del gruppo, fate un istogramma utilizzando l'intero set di dati.

e) Confrontate i risultati ottenuti con i due metodi nell'istogramma complessivo e nei singoli istogrammi, riportando in valori ottenuti in una tabella (rappresentazione tabellare).

f) Dall'analisi complessiva dei dati, ricavate la lunghezza dei chiodi e la corrispondente indeterminazione.

g) Con i valori di $\bar{T}$ e di σ_T ottenuti, tracciate una curva di Gauss sovrapposta all'istogramma complessivo ottenuto al punto (d).

h) Commentate i risultati ottenuti.

Suggerimento. *Conviene portare avanti i calcoli considerando il tempo di 10 oscillazioni e alla fine ricavare il periodo.*

7.4 Esercizi

Esercizio 7.1. Sia data la seguente funzione di distribuzione

$$f(x) = cases|1 - x| \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq 2 \qquad 0 \quad \text{altrove} \qquad cases \tag{7.19}$$

a) Fare un grafico quantitativo di $f(x)$ in funzione di x.

b) Determinare la costante di normalizzazione.

c) Calcolare il valore atteso di x.

[b) $N = 1$; c) $\overline{x} = 1$]

Esercizio 7.2. Sia data la funzione di distribuzione di Figura 7.12

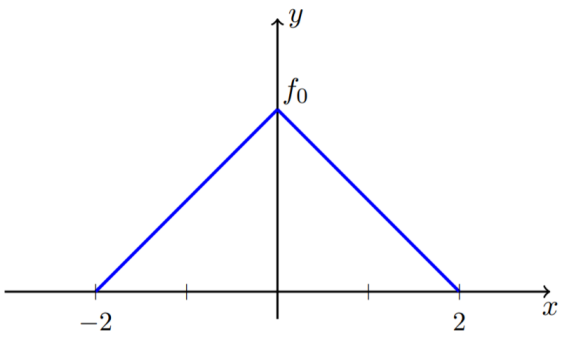


Figura 7.12: Funzione di distribuzione.

a) Determinate il valore di f_0 affinché la funzione di distribuzione sia normalizzata.

b) Inoltre, sapendo che il numero totale di misure è $N = 200$, determinate il numero di misure con valore $x > 1.2$.

[a) $f_0 = 0.5$; b) $n = 16$]

7.5 Quesiti

Quesito 7.1. In un istogramma, l'area di un intervallo rappresenta:

a. il numero complessivo di misure
b. la frequenza assoluta
c. il rapporto fra la frequenza relativa e l'ampiezza dell'intervallo
d. il rapporto fra la frequenza assoluta e l'ampiezza dell'intervallo
e. la frequenza relativa

[b. la frequenza assoluta]

Quesito 7.2. Data la funzione di distribuzione di Figura 7.13, determinate il valore di f_0 affinché la funzione di distribuzione sia normalizzata.

a. $f_0 = 5$
b. $f_0 = 4$

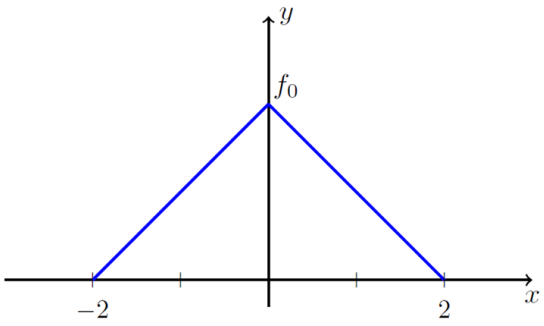


Figura 7.13: Funzione di distribuzione.

c. $f_0 = 0.5$
d. $f_0 = 0.25$
e. $f_0 = 2$

[c. $f_0 = 0.5$]

Quesito 7.3. Data la funzione di distribuzione di Figura 7.14, con $f_0 = 0.5$, determinate la frazione di misure che cadono nell'intervallo $-1 < x < 1$.

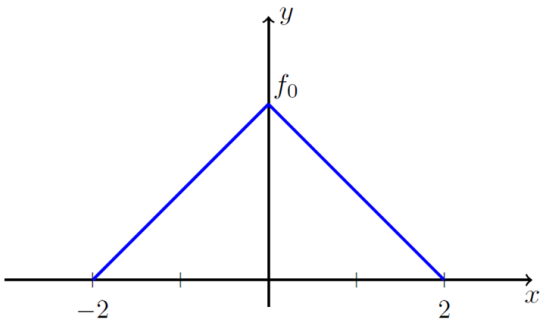


Figura 7.14: Funzione di distribuzione.

a. 0.75
b. 0.375
c. 0.5
d. 0.25
e. 0.4

[a. 0.75]

Capitolo 8

La distribuzione normale o di Gauss

Indice

8.1 La funzione di Gauss 130

8.1.1 Standardizzazione 132

8.1.2 Nota storica 133

8.2 Valore medio e valore centrale della distribuzione normale . 134

8.3 Deviazione standard e parametro di larghezza 135

8.4 Esercizi 136

8.5 Quesiti 137

Nel capitolo precedente abbiamo visto che se una misurazione di una grandezza x è influenzata dalla presenza di molte sorgenti di piccoli errori casuali e trascurabili errori strumentali, allora i valori misurati saranno distribuiti attorno al valore vero X secondo una curva a campana. In questo capitolo, ci occuperemo di misure che hanno questa proprietà, in quanto nella maggior parte degli esperimenti di fisica le misure hanno come distribuzione limite una curva simmetrica a campana, anche se non tutte le distribuzioni limite hanno queste caratteristiche.[1]

Se le nostre misure hanno errori sistematici non trascurabili, allora "non" dovremmo aspettarci che la distribuzione limite sia centrata sul valore vero. Gli errori casuali invece spingono con la stessa probabilità le nostre letture sopra o sotto il valore vero. Se tutti gli errori sono casuali, dopo molte misurazioni ci saranno tante osservazioni al di sopra del valore vero quante al di sotto e la nostra distribuzione limite sarà centrata sul valore

[1] Per esempio, la distribuzione binomiale e la distribuzione di Poisson, di cui noi non ci occuperemo, hanno una forma asimmetrica.

vero. La presenza di un errore sistematico (come un metro a nastro che si è allungato o un errore di parallasse) influenza le misure sempre allo stesso modo e così la distribuzione dei valori osservati risulterà centrata attorno a un valore diverso dal valore vero. Qui, assumiamo che la distribuzione sia centrata sul valore vero; ciò equivale ad assumere che tutti gli errori sistematici siano stati eliminati e gli errori strumentali ridotti a un livello trascurabile rispetto agli errori casuali. Tuttavia, la domanda di quale sia il "valore vero" di una grandezza fisica non ha una risposta semplice e soddisfacente. Dal momento che è ovvio che nessuna misurazione può determinare esattamente il valore vero di una variabile continua (una lunghezza, un tempo, ecc.), non è ancora chiaro se il valore vero di tale grandezza esista realmente. Tuttavia, è molto conveniente assumere che ogni grandezza fisica abbia un valore vero e noi faremo questa ipotesi. Possiamo pensare che il valore vero di una grandezza sia quel valore al quale ci si avvicina sempre di più all'aumentare del numero di misurazioni. Come tale, il valore vero è un'idealizzazione, analoga al punto matematico che non ha dimensione o alla retta che non ha spessore.

8.1 La funzione di Gauss

Se le misure di x sono soggette a molti piccoli errori casuali e gli errori strumentali sono trascurabili, allora le misure avranno una distribuzione limite con una forma simmetrica a campana centrata sul valore vero X. In questo caso, diciamo che le misure seguono la *distribuzione normale*. La funzione matematica che descrive la curva simmetrica a campana è chiamata *funzione di Gauss*, dal nome del fisico e matematico tedesco Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855). In Figura 8.1 è mostrata una banconota da 10 marchi in cui è presente il ritratto di Gauss e la curva gaussiana. L'espressione matematica della gaussiana è la seguente:

$$f(x) = Ne^{-x^2/2\sigma^2}\,, \tag{8.1}$$

dove N è una costante detta *costante di normalizzazione* e σ è un parametro fisso che chiameremo *parametro di larghezza* della curva di Gauss.

Gli studenti di un corso di Laboratorio di Fisica devono familiarizzare con le proprietà di questa funzione. Quando $x = 0$, la funzione di Gauss (8.1) assume valore massimo uguale a N. La funzione è simmetrica attorno a $x = 0$, dal momento che ha lo stesso valore per valori positivi della x e per valori negativi della x, cioè $f(x) = f(-x)$ e quindi la funzione di Gauss è una funzione pari. Quando x si allontana dallo zero in ognuna delle due direzioni, $x^2/2\sigma^2$ aumenta, rapidamente se σ è piccolo, più lentamente se σ è

grande. Allora, come x si allontana dall'origine, la funzione (8.1) diminuisce e tende a zero. Così, l'aspetto generale della funzione di Gauss (8.1) è come quello mostrato in Figura 8.2. Il grafico spiega il nome "parametro di larghezza" per σ, dal momento che la curva a campana è larga se σ è grande e stretta se σ è piccolo.



Figura 8.1: Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855) rappresentato nella banconota da 10 marchi; nella banconota è rappresentata anche la curva gaussiana e la sua espressione matematica.

La funzione di Gauss (8.1) è una curva a campana centrata su $x = 0$. Per ottenere una curva a campana centrata attorno a qualche altro punto $x = X$, sostituiamo semplicemente x nella (8.1) con $(x - X)$. Così, la funzione

$$f(x) = Ne^{-(x-X)^2/2\sigma^2} \tag{8.2}$$

ha il massimo per $x = X$ e diminuisce simmetricamente da ambo i lati di $x = X$, come mostrato in Figura 8.3.

La funzione (8.2) non è ancora nella sua forma finale per descrivere una distribuzione limite, perché ogni distribuzione deve essere normalizzata; cioè, deve soddisfare la condizione di normalizzazione ossia la seguente condizione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} Ne^{-(x-X)^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x = 1\,. \tag{8.3}$$

Per trovare il fattore di normalizzazione N, dobbiamo calcolare l'integrale (8.3). Dal calcolo degli integrali, di cui diamo solo il risultato, si ottiene

$$N = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,. \tag{8.4}$$

Concludiamo che la funzione di distribuzione normale o di Gauss correttamente normalizzata è la seguente

$$f_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}\,. \tag{8.5}$$

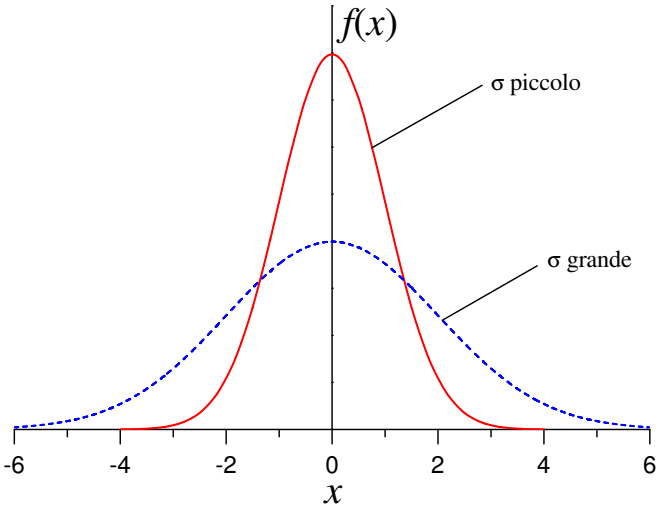


Figura 8.2: La funzione di Gauss (8.1) centrata su $x = 0$. La curva ha forma a campana ed è larga se il parametro di larghezza σ è grande, stretta se σ è piccolo.

Nella funzione di Gauss (8.5) abbiamo scritto i pedici X e σ per indicare, rispettivamente, il centro e la larghezza della funzione.

Ricapitolando, la funzione $f_{X,\sigma}(x)$ descrive la distribuzione limite delle misure di una grandezza x, il cui valore vero è X, se le misure sono soggette soltanto a piccoli errori casuali causati da un numero elevato di sorgenti indipendenti. Tutte le misure la cui distribuzione limite è data dalla funzione di Gauss (8.5) si dice che sono distribuite normalmente, oppure che seguono la distribuzione normale.

Esploriamo brevemente il significato del parametro di larghezza σ. È già chiaro che un piccolo valore di σ dà una distribuzione fortemente piccata, corrispondente a una misurazione precisa; mentre un grande valore di σ dà una distribuzione allargata, corrispondente a una misurazione con bassa precisione. In Figura 8.3, mostriamo due esempi di distribuzione di Gauss centrata su due diversi valori X e con due diverse larghezze σ. Notiamo come il fattore σ nel denominatore della (8.5) garantisca che una distribuzione più stretta (σ più piccolo) abbia il valore del massimo automaticamente più grande, come deve essere affinché l'area sotto la curva sia sempre uguale a 1.

8.1.1 Standardizzazione

A volte è conveniente effettuare un cambiamento di variabile applicando una trasformazione lineare chiamata *standardizzazione*, in modo tale che la nuova variabile abbia valore medio nullo e deviazione standard unitaria. In generale, dati un insieme di valori x_1, x_2, $\ldots$, x_n con media $\overline{x}$ e deviazione standard σ_x, i valori standardizzati z_1, z_2, $\ldots$, z_n sono

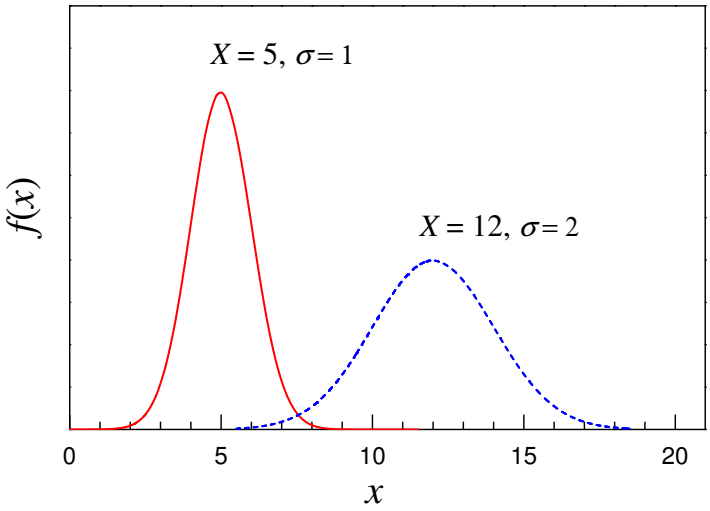


Figura 8.3: Due distribuzioni gaussiane caratterizzate da due differenti coppie di valori di X e σ, che indicano rispettivamente il massimo e la larghezza della curva.

definiti come

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma_x} \quad i = 1, \ldots, n\,; \tag{8.6}$$

la distribuzione risultante avrà valore medio $\overline{z} = 0$ e deviazione standard $\sigma_z = 1$.

Applicando la stessa trasformazione lineare alla funzione di Gauss, ossia ponendo $z = (x - X)/\sigma$, si ottiene la funzione di Gauss standardizzata, che ha la seguente espressione

$$f_{Z=0,\sigma=1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\,; \tag{8.7}$$

la funzione standardizzata sarà centrata in $Z = 0$, avrà larghezza $\sigma = 1$ e inoltre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Z=0,\sigma=1}(z)\, \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\, \mathrm{d}z = 1\,. \tag{8.8}$$

8.1.2 Nota storica

Il primo gennaio 1801, l'abate Giuseppe Piazzi (1746 - 1826) dell'Osservatorio Astronomico di Palermo scoprì il primo asteroide (ora pianeta nano) della storia, a cui diede il nome di Cerere Ferdinandea in onore della dea romana Cerere (Demetra per i greci), protettrice delle messi e della Sicilia, e di Ferdinando I delle Due Sicilie.

Dopo poche settimane dalla scoperta di Piazzi, il piccolo corpo celeste, visibile solo al telescopio, fu perso di vista. La posizione di Cerere era cambiata ed era troppo vicina al riverbero del Sole (in congiunzione con il Sole) da impedire ad altri astronomi di confermare l'osservazione di Piazzi. Verso la fine dell'anno, Cerere avrebbe dovuto essere

visibile nuovamente, ma dopo il lungo periodo trascorso era difficile predire la sua esatta posizione. Per ritrovare nuovamente la posizione di Cerere, Gauss sviluppò un efficace metodo per determinare l'orbita di un generico corpo celeste, che si poteva basare su tre sole osservazioni. In poche settimane, Gauss predisse la traiettoria di Cerere, in base ai dati precedentemente raccolti da Piazzi, e comunicò i suoi risultati a Franz Xaver von Zach (1754 - 1832). Il 31 dicembre 1801, von Zach ed Heinrich Olbers (1758 - 1840) osservarono nuovamente Ceres vicino alla posizione prevista da Gauss.

Il metodo sviluppato da Gauss, all'età di soli 24 anni, era basato sull'utilizzo del metodo dei minimi quadrati; tale metodo, sviluppato appositamente per l'astronomia, data la sua bontà, si diffuse immediatamente in molti altri ambiti della fisica.[2]

8.2 Valore medio e valore centrale della distribuzione normale

Abbiamo visto nel Paragrafo 7.2 che la conoscenza della funzione di distribuzione ci permette di calcolare il valor medio $\overline{x}$ atteso dopo un gran numero di misurazioni. Secondo la relazione (7.11), la media attesa dopo molte prove è

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x \,. \tag{8.9}$$

Se la funzione di distribuzione è la funzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$ centrata sul valore vero X e larghezza σ, il suo integrale può essere facilmente calcolato. Prima di fare ciò, notiamo che è piuttosto ovvio che la media $\overline{x}$ dopo molte prove sarà proprio X. Poiché la funzione di Gauss è simmetrica attorno a X, questo implica che quanti risultati cadranno a una certa distanza al di sopra di X altrettanti cadranno a una uguale distanza al di sotto di X. Così, la media dovrebbe essere X. In altre parole, se le misure sono distribuite secondo la distribuzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$, dopo molte prove il valore medio $\overline{x}$ si avvicina sempre di più al valore vero X su cui la funzione di Gauss è centrata. Tuttavia, solo dopo un numero infinito di misurazioni, il valore medio $\overline{x}$ sarà uguale al valore vero X.

Quando la distribuzione limite di una serie di misure è descritta dalla funzione di Gauss, il valore medio dopo un grande numero di prove è dato da

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,\sigma}(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-(x-X)^2/2\sigma^2} \mathrm{d}x \,. \tag{8.10}$$

[2]Per un approfondimento sulle vicissitudini che condussero alla scoperta di Cerere, si veda I. Chinnici (a cura di), *Cerere Ferdinandea*, INAF - Osservatorio Astronomico "Giuseppe S. Vaiana" (Palermo 2015).

Effettuando la standardizzazione $z = (x - X)/\sigma$ si ha $\sigma \mathrm{d}z = \mathrm{d}x$ e l'integrale di sopra diventa

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma z + X}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\, \sigma \mathrm{d}z\,. \tag{8.11}$$

Semplificando si ottiene

$$\overline{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z\, e^{-z^2/2} \mathrm{d}z + \frac{X}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}\, \mathrm{d}z\,. \tag{8.12}$$

Il primo integrale è nullo perché la funzione integranda è una funzione dispari, ottenuta dal prodotto di una funzione pari per funzione dispari; il secondo integrale è uguale a $\sqrt{2\pi}$, in quanto la funzione di Gauss $f_{z=0,\ \sigma=1}$ è normalizzata e quindi il suo integrale (area sottesa) deve essere uguale a 1. Quindi, si ottiene $\overline{x} = X$, cioè il valore medio di una serie di infinite misure coincide con il valore vero attorno a cui la distribuzione di Gauss è centrata (valore centrale della distribuzione).

8.3 Deviazione standard e parametro di larghezza della distribuzione normale

Un'altra grandezza importante che si può calcolare dopo un grande numero di prove è la deviazione standard σ_x, usando la relazione (7.12), che riscriviamo per comodità

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x})^2 f(x) \mathrm{d}x\,. \tag{8.13}$$

Nota la funzione di distribuzione $f(x)$, il quadrato della deviazione standard σ_x^2 si può calcolare come media degli scarti al quadrato. Se la distribuzione di Gauss rappresenta la distribuzione limite di una serie di misure, la deviazione standard dopo un grande numero di prove è data da

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x})^2 f_{X,\sigma}(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - \overline{x})^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-X)^2/2\sigma^2} \mathrm{d}x\,. \tag{8.14}$$

dove abbiamo indicato con σ_x la deviazione standard delle misure e con σ il parametro di larghezza della curva di Gauss. Sfruttando il risultato ottenuto nel paragrafo precedente che $\overline{x} = X$, otteniamo

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - \overline{x})^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\overline{x})^2/2\sigma^2}\, \mathrm{d}x\,. \tag{8.15}$$

Come abbiamo fatto precedentemente, effettuiamo il cambio di variabile $z = (x - \overline{x})/\sigma$; integrando per parti, si ottiene il seguente risultato

$$\sigma_x^2 = \sigma^2\,. \tag{8.16}$$

La deviazione standard σ_x è uguale al parametro di larghezza della curva di Gauss σ. Per questo motivo, la lettera σ è utilizzata per il parametro di larghezza e spiega perché σ è spesso chiamata *deviazione standard della distribuzione gaussiana*. Si sottolinea che il risultato espresso dalla (8.16) si ottiene dopo un numero di prove tendente a infinito. Per un qualsiasi numero limitato di misure (per esempio 10 oppure 20), la deviazione standard osservata σ_x è un'approssimazione di σ e non abbiamo ragione di pensare che sia esattamente σ. In questo caso, la deviazione standard osservata σ_x è il valore che meglio approssima quello atteso dopo un numero elevato di prove. Questo giustifica anche la scelta di calcolare σ_x come

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})^2 \,. \tag{8.17}$$

In questo modo, con un numero finito di misure si otterrà un valore di σ_x maggiore di quello atteso dopo un numero infinito di prove. D'altronde, se n è molto grande allora non vi è alcuna differenza tra la deviazione standard calcolata con n e quella calcolata con $n-1$.

Infine, vale la pena osservare che la relazione fra la larghezza a metà altezza Γ e il parametro di larghezza σ della gaussiana è la seguente

$$\Gamma \approx 2.36\,\sigma \qquad \text{e} \qquad \frac{\Gamma}{2} \approx 1.18\,\sigma \,, \tag{8.18}$$

da cui risulta che la semi-larghezza a metà altezza è maggiore di σ di circa il 18%.

8.4 Esercizi

Esercizio 8.1. Una distribuzione di misure può essere descritta dalla funzione gaussiana seguente:

$$f_{X,\sigma}(x) = N\; e^{-(x-50)^2/50} \,. \tag{8.19}$$

Determinate la larghezza della distribuzione σ, il valore centrale X e la costante di normalizzazione N.

$$[\overline{x} = 50;\; \sigma = 5;\; N = \tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = 0.080]$$

Esercizio 8.2. Una distribuzione di misure riproduce una funzione gaussiana di larghezza 2 unità e centrata in $X = 5$ unità. Scrivete la funzione gaussiana corrispondente.

$$[f_{5,2}(x) = \tfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\; e^{-(x-5)^2/8} = 0.2\; e^{-(x-5)^2/8}]$$

8.5 Quesiti

Quesito 8.1. La funzione di distribuzione di Gauss è normalizzata quando

a. il valore massimo della funzione vale uno
b. l'area sottesa alla curva vale uno
c. il campo di definizione della funzione vale uno
d. la larghezza a metà altezza della funzione vale uno
e. la funzione è uguale a uno

[b. l'area sottesa alla curva vale uno]

Capitolo 9

Distribuzioni di probabilità

Indice

9.1 Distribuzione discreta di probabilità 140

9.2 Distribuzione continua di probabilità 140

9.2.1 Funzione di probabilità cumulata o funzione di ripartizione . . 142

9.3 Integrale normale degli errori 144

9.4 Giustificazione della media come migliore stima 147

9.5 Giustificazione della deviazione standard 148

9.5.1 Deviazione standard della media 149

9.5.2 Incertezza nella deviazione standard 150

9.6 Ulteriori applicazioni del principio di massima verosimiglianza 151

9.7 Esercizi 151

9.8 Quesiti 152

In questo capitolo guarderemo la distribuzione limite con un'altra prospettiva. Vedremo che la distribuzione limite rappresenta una distribuzione di probabilità, dalla quale si possono trarre importanti considerazioni. Cominciamo con una definizione di probabilità per poi continuare con le distribuzioni di probabilità.

Un modo di procedere per determinare la probabilità di verificarsi un determinato evento è quello di seguire il cosiddetto *metodo empirico*. Per esempio, si lancia un dado moltissime volte e si calcola il numero di volte che ciascuna faccia esce (facendo attenzione

a lanciare il dado "bene", cioè senza favorire anche involontariamente alcuna faccia). La probabilità di verificarsi un evento può essere definita nel seguente modo.[1]

> La probabilità di verificarsi un evento A è il limite, al crescere all'infinito delle prove, della frequenza dell'evento (occorrenza frazionaria); cioè, è il limite del rapporto tra il numero delle prove n_A in cui l'evento A si verifica (numero di prove favorevoli) e il numero totale di prove n:
>
> $$P(A) = \lim_{n\to\infty} = \frac{n_A}{n}\,. \tag{9.1}$$

La definizione di probabilità appena data è detta *definizione frequenzistica (o frequentista)*. Sulla base della definizione (9.1), risulta che la probabilità è una grandezza che può assumere qualunque valore compreso tra 0 e 1; assume valore 1 se l'evento è certo, assume valore 0 se l'evento è impossibile.

9.1 Distribuzione discreta di probabilità

Quando lanciamo un dado a sei facce, sappiamo che tutte le facce del dado hanno la stessa probabilità di uscita. L'insieme dei valori delle probabilità delle singole uscite $P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = 1/6$, con $\sum P_i = 1$, rappresenta una *distribuzione discreta di probabilità*. In questo caso, la probabilità di un determinato evento di verificarsi è descritta da funzioni di variabili discrete. Per esempio, nel lancio di un dado la variabile indipendente assume solamente 6 valori, dove il numero di valori n è un numero intero compreso tra 1 e 6, con la distribuzione di probabilità mostrata in Figura 9.1. In Figura 9.2, è riportata la distribuzione discreta di probabilità di ottenere una determinata uscita nel lancio di due dadi; in questo caso, la variabile indipendente assume $n = 11$ valori, con n numero intero compreso tra 2 e 12. A differenza del caso precedente, ora le varie uscite nel lancio di due dadi hanno probabilità differenti.

9.2 Distribuzione continua di probabilità

Dalla definizione (9.1) si ha che la probabilità di verificarsi un evento A è data dall'occorrenza frazionaria, cioè dal rapporto tra il numero di prove n_A e il numero totale di prove n. Per poter calcolare l'occorrenza frazionaria nel caso di una distribuzione continua,

[1] Lo studente che non ha ancora acquisito le nozioni del calcolo delle probabilità può trovare alcuni elementi nell'Appendice B.

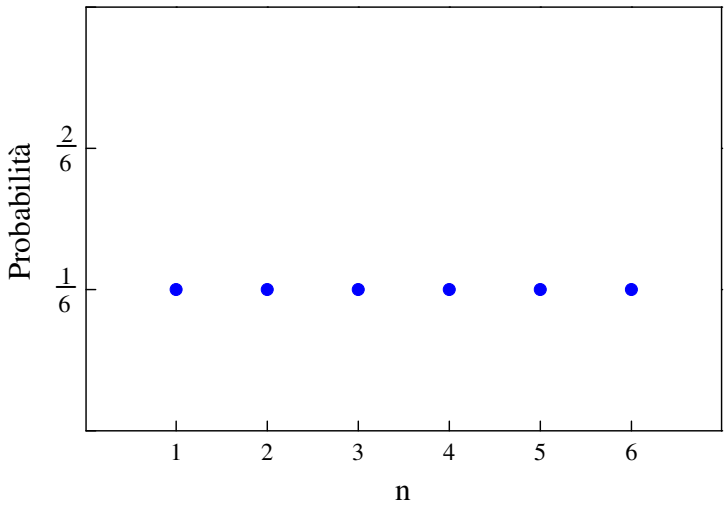


Figura 9.1: Distribuzione discreta di probabilità per il lancio di un dado a sei facce.

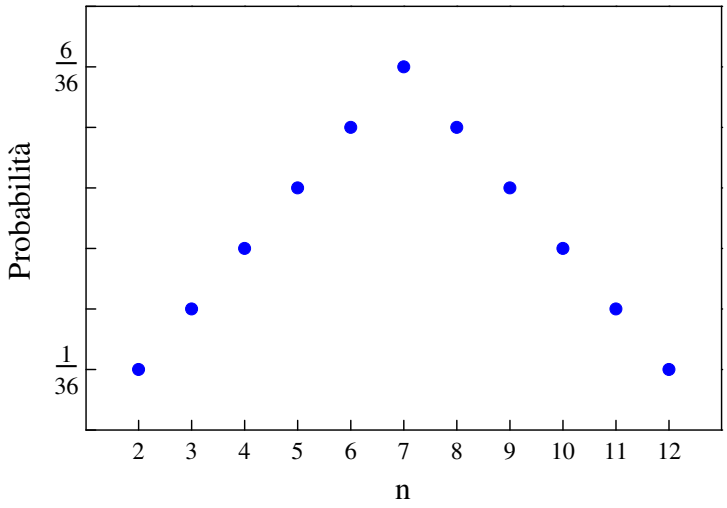


Figura 9.2: Distribuzione discreta di probabilità per il lancio di due dadi a sei facce.

dobbiamo definire un intervallo di valori compresi tra x e $x + \mathrm{d}x$. Allora, la frazione di misure (occorrenza frazionaria) che ci aspettiamo di trovare nell'intervallo x e $x + \mathrm{d}x$, dopo avere fatto un numero molto grande di misurazioni (tendente a infinito), e cioè la quantità $f(x)\mathrm{d}x$, rappresenta proprio la probabilità che in una singola misurazione della variabile indipendente si ottenga un risultato compreso fra x e $x + \mathrm{d}x$. Riassumendo:

$$f(x)\mathrm{d}x = (\text{probabilità che una misura cada nell}'\text{intervallo } x \text{ e } x + \mathrm{d}x)\,; \tag{9.2}$$

analogamente,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\text{probabilità che una misura cada nell}'\text{intervallo } a \leq x \leq b)\,. \tag{9.3}$$

Vale la pena notare che se la variabile indipendente è continua la probabilità che essa assuma un determinato valore non può essere maggiore di zero, in quanto se gli estremi, nell'integrale di sopra, coincidono allora il valore dell'integrale è nullo.

Poiché la probabilità che in una singola misurazione si ottenga un risultato compreso fra x e $x + \mathrm{d}x$ è data dal prodotto $f(x)\mathrm{d}x$, la funzione $f(x)$ rappresenta una densità e per tale motivo è chiamata *funzione densità di probabilità*.

Siamo arrivati alla seguente importante conclusione: se conoscessimo la distribuzione limite $f(x)$ per la misura di una data grandezza x con una data strumentazione, allora dovremmo conoscere la probabilità di ottenere un risultato in qualsiasi intervallo $a \leq x \leq b$. Dal momento che la probabilità totale di ottenere un risultato in qualunque punto tra $-\infty$ e $+\infty$ deve essere uno (o del 100%), la distribuzione limite $f(x)$ deve soddisfare la seguente condizione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1\,, \tag{9.4}$$

ossia, deve soddisfare la condizione di normalizzazione. Pertanto, affinché una funzione rappresenti una distribuzione di probabilità deve soddisfare la condizione di normalizzazione. Lo studente potrebbe pensare che i limiti $-\infty$ e $+\infty$ nell'integrale (9.4) significano che ci aspettiamo di ottenere risultati da $-\infty$ a $+\infty$. È vero il contrario. In qualunque esperimento reale, le misure sono tutte comprese in qualche piccolo ben definito intervallo di valori. Anche dopo infinite misurazioni, la frazione di misure che giacciono al di fuori dell'intervallo compreso fra $x = a$ e $x = b$ dovrebbe essere completamente trascurabile. In altre parole, $f(x)$ è essenzialmente zero al di fuori di questo intervallo e non vi è differenza fra l'integrale (9.4) calcolato da $-\infty$ a $+\infty$ e quello calcolato da a a b. Poiché generalmente i valori limite delle nostre misure non sono noti, è più conveniente lasciare i limiti dell'integrale (9.4) indicati come $-\infty$ e $+\infty$.

9.2.1 Funzione di probabilità cumulata o funzione di ripartizione

Data una funzione di distribuzione di probabilità $f(x)$, possiamo definire una funzione $F(z)$, chiamata *funzione di probabilità cumulata* o *funzione di ripartizione*. La funzione $F(z)$ è definita nel seguente modo

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(x)\mathrm{d}x\,. \tag{9.5}$$

L'integrale (9.5) corrisponde al calcolo dell'area grigia indicata in Figura 9.3.

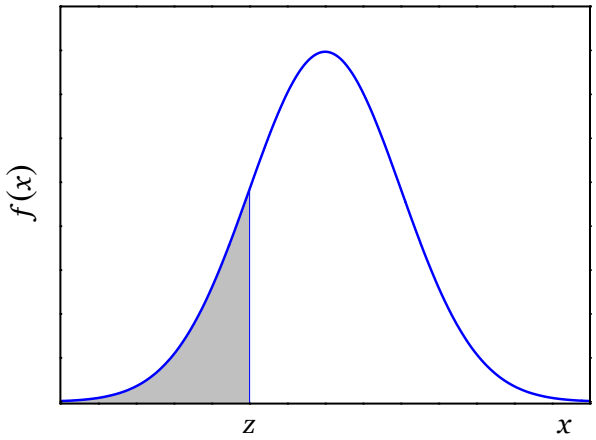


Figura 9.3: La funzione di probabilità cumulata $F(z)$, data dall'Equazione 9.5, corrisponde all'area grigia sotto la curva $f(x)$.

Esempio 9.1. La funzione di probabilità cumulata della funzione di distribuzione uniforme è molto facile da calcolare. Consideriamo la seguente funzione di distribuzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{9.6}$$

La funzione di probabilità cumulata $F(z)$ si ottiene con il seguente integrale

$$F(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{z} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{z} \mathrm{d}x = z & \text{per} \quad 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \quad \text{per} \quad x \leq 0 \\ 1 \quad \text{per} \quad x \geq 1 \end{cases} \tag{9.7}$$

In Figura 9.4 e mostrata la funzione di probabilità cumulata $F(z)$ ottenuta dall'integrale della funzione di distribuzione uniforme di Equazione (9.6).

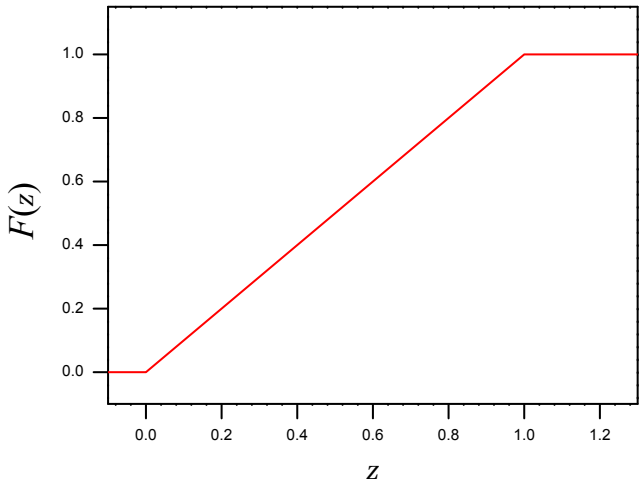


Figura 9.4: La funzione di probabilità cumulata $F(z)$ relativa alla distribuzione uniforme di Equazione (9.6).

9.3 Integrale normale degli errori

Nei paragrafi precedenti, abbiamo visto che la probabilità di ottenere, in una singola misurazione, un determinato risultato compreso tra x e $x + \mathrm{d}x$ è data dalla frazione di misure (occorrenza frazionaria) che ci aspettiamo di trovare nell'intervallo x e $x + \mathrm{d}x$, dopo avere fatto un numero molto grande di misurazioni (tendente a infinito)

$$(\text{probabilità che una misura cada tra } x \text{ e } x + \mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x\,. \tag{9.8}$$

Abbiamo visto anche che la probabilità di ottenere un valore x compreso nell'intervallo $a \leq x \leq b$ può essere calcolata come

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,. \tag{9.9}$$

Nel caso in cui la funzione di distribuzione sia la funzione di Gauss, è molto utile calcolare la probabilità di ottenere in una misurazione un valore compreso nell'intervallo $(X - t\sigma) \leq x \leq (X + t\sigma)$. Questo corrisponde a calcolare l'area sottesa alla curva di Gauss nell'intervallo $(X - t\sigma) \leq x \leq (X + t\sigma)$, come mostrato in Figura 9.5, cioè è equivalente a calcolare il seguente integrale

$$P(x \text{ entro } t\sigma) = \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} f(x)\mathrm{d}x = \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}\, \mathrm{d}x\,. \tag{9.10}$$

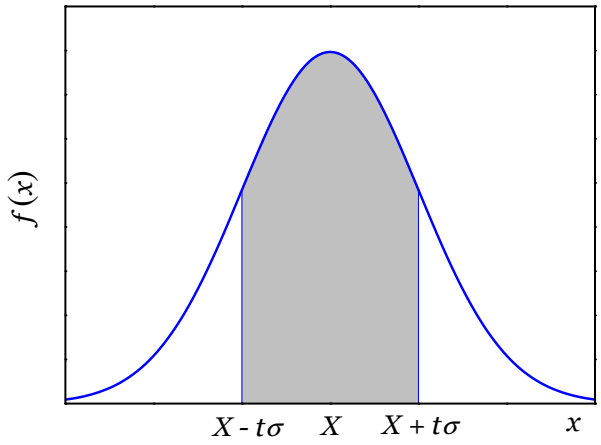


Figura 9.5: L'area grigia indica la probabilità $P(\text{entro } t\sigma)$ che una misura di x cada entro $t\sigma$ dal valore centrale X.

L'integrale (9.10) è un integrale standard della fisica matematica ed è noto con il nome di *integrale normale degli errori*. Il calcolo dell'integrale (9.10) non è semplice da fare analiticamente, specialmente per gli studenti del primo anno di Università. Oggi si possono trovare molti programmi e apps[2] che forniscono proprio il risultato di questo calcolo. Tuttavia, in Tabella 9.1 sono tabulati alcuni valori dell'integrale (9.10) al variare di t.[3] In primo luogo, notiamo che la probabilità che una misura cada entro σ dal valore vero X è del 68.3%, ciò equivale a dire che la probabilità che una misura cada entro una deviazione standard σ_x dal valore medio $\bar{x}$ è del 68.3%. Se usiamo la deviazione standard σ_x come incertezza in tale misura (cioè, scriviamo $x = x_{best} \pm \delta_x$ e assumiamo $\delta_x = \sigma_x$), allora possiamo essere confidenti al 68.3% di essere entro σ_x dal risultato corretto. La probabilità che una misura cada entro $2\sigma_x$ è 95.4%; quella per $3\sigma_x$ è 99.7%. La probabilità $P(\text{entro } t\sigma_x)$ si avvicina rapidamente al 100% all'aumentare di t. I valori 68.3%, 95.4% e 99.7% non hanno un particolare significato tranne per il fatto che essi indicano la confidenza associata con σ_x, $2\sigma_x$ e $3\sigma_x$, rispettivamente. Ribadiamo che, quando si stima una grandezza, la semplice individuazione di un singolo valore è spesso non sufficiente; è opportuno accompagnare la stima della grandezza con un intervallo di valori probabili per quella misura. Questo intervallo di valori è chiamato *intervallo di confidenza*. In

[2]Con il neologismo "app" si intende un'applicazione informatica per dispositivi mobili: smartphone e tablet; il termine app deriva proprio dall'abbreviazione di "applicazione".

[3]In Appendice E sono riportati i valori dell'integrale (9.10) al variare di t.

Figura 9.6 è mostrato l'integrale normale degli errori;[4] la curva di Figura 9.6 descrive la probabilità $P(\text{entro } t\sigma)$ che una misura di x cada entro $t\sigma$ dal valore centrale X, al variare del parametro t.

La probabilità $P(x \text{ entro } t\sigma)$, cioè la porzione di area sottesa alla curva di Gauss nell'intervallo $(X - t\sigma) \leq x \leq (X + t\sigma)$, rappresenta il cosiddetto *livello di confidenza*[5], mentre la probabilità $P(x \text{ al di fuori di } t\sigma) = 1 - P(x \text{ entro } t\sigma)$, cioè la porzione di area sottesa alla curva di Gauss negli intervalli $x \leq (X - t\sigma)$ e $x \geq (X + t\sigma)$, rappresenta il cosiddetto *livello di significatività a due code*.

Tabella 9.1: Probabilità $P(\text{entro } t\sigma)$ che una misura di x cada entro $t\sigma$ dal valore centrale X.

t	0	0.25	0.5	0.67	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
P (%)	0	20	38	50	55	68.3	79	87	92	95.4	98.8	99.7	99.95	99.99

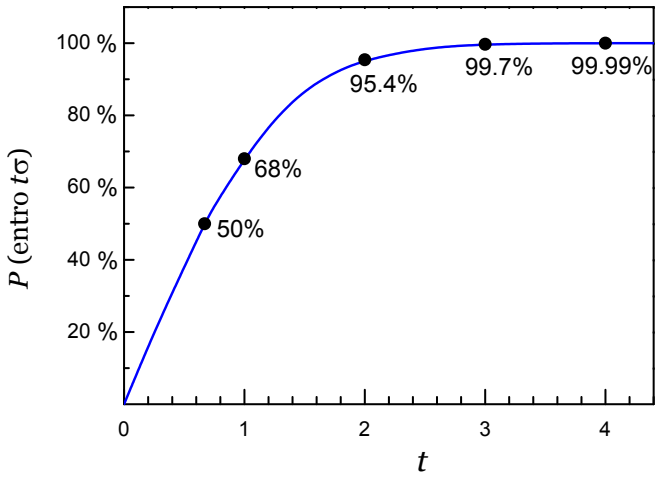


Figura 9.6: Integrale normale degli errori. La curva descrive la probabilità $P(\text{entro } t\sigma)$ che una misura di x cada entro $t\sigma$ dal valore centrale X.

Un'alternativa alla deviazione standard è il cosiddetto *errore probabile* δ_p che è definito come quella distanza per cui vi è un 50% di probabilità di trovare una misura tra $X \pm \delta_p$. Si può vedere che (per una serie di misure distribuite normalmente) l'errore probabile

[4] In statistica, l'integrale normale degli errori è chiamato anche *funzione di ripartizione*, *funzione di probabilità cumulata* o *funzione di distribuzione cumulativa*.

[5] Attenzione a non fare confusione tra l'intervallo di confidenza, che rappresenta un intervallo di valori probabili della funzione, con il livello di confidenza, che rappresenta una probabilità di ottenere un determinato valore.

corrisponde a 0.67 σ_x

$$\delta_p \approx 0.67\ \sigma_x\,. \tag{9.11}$$

Alcuni ricercatori preferiscono assumere l'errore probabile δ_p come l'incertezza nelle loro misure. Tuttavia, la deviazione standard σ_x è la scelta più comune, per le sue semplici proprietà.

9.4 Giustificazione della media come migliore stima: principio di massima verosimiglianza

In qualunque esperimento reale, si dispone solamente di un numero finito di valori misurati. Quindi, non si conosce a priori la distribuzione limite e i parametri che la caratterizzano: il valore vero X e il parametro di larghezza σ. Pertanto, bisogna valutare dalle misure la migliore stima per il valore vero della grandezza misurata.

Supponiamo di avere n misure della grandezza $x_1, x_2, ..., x_n$ e di conoscere a priori il valore vero X e la larghezza σ della distribuzione normale limite associata alle misure. Come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, la probabilità $P(x_1)$ di ottenere una misura nell'intervallo x_1 e $x_1 + \mathrm{d}x$ è data da

$$P(x \text{ compreso tra } x_1 \text{ e } x_1 + \mathrm{d}x) = f(x_1)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_1 - X)^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x\,. \tag{9.12}$$

Tralasciando i coefficienti numerici e l'ampiezza dell'intervallo $\mathrm{d}x$, si può scrivere

$$P(x_1) \propto \frac{1}{\sigma} e^{-(x_1 - X)^2/2\sigma^2}\,. \tag{9.13}$$

Di conseguenza, la probabilità di ottenere una misura x_k è data da

$$P(x_k) \propto \frac{1}{\sigma} e^{-(x_k - X)^2/2\sigma^2}\,. \tag{9.14}$$

Ora, la probabilità di osservare l'intero insieme di n valori $x_1, x_2, ..., x_n$ è data dal prodotto delle singole probabilità, in quanto essa è la probabilità che si verifichino eventi indipendenti[6]

$$P(x_1, ..., x_n) = P(x_1)P(x_2)\cdots P(x_n) \propto \frac{1}{\sigma^n} e^{-\sum(x_i - X)^2/2\sigma^2}\,. \tag{9.15}$$

Nella relazione (9.15), i valori $x_1, x_2, ..., x_n$ sono noti in quanto sono i valori ottenuti nelle misurazioni, invece i valori dei parametri X e σ non sono noti. Si assume solamente che

[6] Vedi Appendice B.

le misure obbediscano a una distribuzione limite gaussiana. Per determinare la migliore stima (il valore più verosimile) per X e σ, si può cercare la coppia di valori per cui la probabilità complessiva di ottenere le misure $x_1, x_2, ..., x_n$ è massima. Si applica quello che si chiama il *principio di massima verosimiglianza*. La migliore stima di X è quel valore per cui la probabilità data dalla (9.15) è massima e quindi quando l'esponente nella (9.15) è minimo. Pertanto, per determinare la migliore stima di X si effettua la derivata rispetto a X della funzione

$$f(x) = \frac{\sum (x_i - X)^2}{2\sigma^2} \tag{9.16}$$

e si pone uguale a zero:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} \left\{ \frac{\sum (x_i - X)^2}{2\sigma^2} \right\} = \sum (x_i - X) = 0\,, \tag{9.17}$$

da cui si ottiene

$$X_{best} = \frac{\sum x_i}{n} = \overline{x}\,, \tag{9.18}$$

dove con X_{best} abbiamo indicato la migliore stima per il valore vero X ottenuta a partire dai risultati delle misurazioni. Come avevamo anticipato nei capitoli precedenti, la migliore stima per il valore vero della grandezza misurata è proprio la media $\overline{x}$ delle misure.

9.5 Giustificazione della deviazione standard

Anche per trovare la migliore stima per σ si può procedere in modo analogo a quanto fatto nel paragrafo precedente per determinare la migliore stima del valore vero X. Occorre infatti effettuare la derivata della funzione (9.15) rispetto a σ e porre la derivata uguale a zero:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \left\{ \frac{1}{\sigma^n}\, e^{-\sum (x_i - X)^2 / 2\sigma^2} \right\} = \sigma^{-(n+3)} \left[\sum (x_i - X)^2 - n\sigma^2 \right] e^{-\sum (x_i - X)^2 / 2\sigma^2} = 0\,; \tag{9.19}$$

da cui si ottiene

$$\sigma^2_{best} = \frac{\sum (x_i - X)^2}{n} \tag{9.20}$$

e

$$\sigma_{best} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - X)^2}{n}}\,. \tag{9.21}$$

Il risultato che abbiamo appena trovato ci dice che la migliore stima per σ si ottiene con il valore vero X, che in generale non è esattamente uguale alla media $\overline{x}$ delle nostre misure, visto che abbiamo sempre un numero finito di misure. Quindi, la quantità $\sum(x_i - X)^2$ è certamente minore, o al massimo uguale, della quantità $\sum(x_i - \overline{x})^2$,

$$\sum(x_i - X)^2 \leq \sum(x_i - \overline{x})^2 \,, \tag{9.22}$$

poiché la probabilità di trovare l'insieme di valori $x_1, x_2, ..., x_n$ è massima solo con il valore vero X. Si può dimostrare che questa sovrastima può essere corretta sostituendo $n-1$ a n in σ_{best} dell'Equazione (9.21), ottenendo il risultato che abbiamo introdotto nei primi capitoli del libro e giustificato con argomentazioni pratiche

$$\sigma_{best} \leq \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \,. \tag{9.23}$$

Se le misure di x sono solamente soggette a errori casuali, allora la loro distribuzione limite è la funzione di Gauss, centrata sul valore vero X e con larghezza σ. La larghezza σ definisce un livello di confidenza del 68.3%, cioè si ha una probabilità del 68.3% che una misura cada entro σ dal valore vero X. Poiché, i valori di X e di σ non sono noti, in quanto non possiamo effettuare un numero infinito di misurazioni ma solamente un numero finito, la migliore stima del valore vero X è la media delle misure $\overline{x} = \sum x_i/n$ e la migliore stima del parametro di larghezza σ è la deviazione standard $\sigma_x = \sqrt{\sum(x_i - \overline{x})^2/(n-1)}$.

È interessante a questo punto capire qual è l'incertezza in $\overline{x}$, quale migliore stima del valore vero X, e qual è l'incertezza in σ_x, quale migliore stima del parametro di larghezza σ della distribuzione. Nei paragrafi seguenti, affronteremo questi due punti.

9.5.1 Deviazione standard della media

Si supponga di avere n misure della grandezza x e che queste siano distribuite normalmente attorno al valore vero X con parametro di larghezza σ. È possibile chiedersi quale sia l'incertezza, e dunque l'affidabilità, da associare alla media come migliore stima del valore vero. La media

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i \tag{9.24}$$

può essere vista come una funzione semplice degli n valori x_i. Quindi, è possibile utilizzare le regole di propagazione degli errori viste nel Capitolo 3 e nel capitolo 4 per determinare la distribuzione dei risultati. In questo caso, assumiamo che le x_i siano il risultato di n esperimenti in cui si sono ottenuti gli n valori $\overline{x}_i$ e $\sigma_{\overline{x}_i}$. Si ha che tutte le $\overline{x}_i$ sono misure della stessa grandezza x, con lo stesso valore vero X e lo stesso parametro di

larghezza σ. Da quanto visto, poiché tutte le misure sono distribuite normalmente, deve essere distribuita normalmente anche la loro somma e di conseguenza il valore medio $\overline{x}$. Inoltre, poiché tutte le $\overline{x}_i$ hanno lo stesso valore vero X comune, il valore vero della media deve essere dato da

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X = \frac{n}{n}X = X\,. \tag{9.25}$$

Si ottiene quindi che nell'ipotesi di effettuare parecchie volte lo stesso insieme delle n misure, i possibili valori di $\overline{X}$ ottenuti sarebbero distribuiti normalmente attorno al valore vero X. Per quanto riguarda la larghezza della distribuzione si ha che

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{1}{n}\sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2} = \frac{1}{n}\sqrt{n\sigma_x^2} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\,, \tag{9.26}$$

dove abbiamo assunto che $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n = \sigma_x$.

In conclusione, se si effettua una serie di n misure una sola volta, allora si può essere confidenti al 68.3% che il risultato della media giaccia entro $\sigma_{\overline{x}}$ (per eccesso o per difetto) dal valore vero X. La deviazione standard della media $\sigma_{\overline{x}}$ può dunque essere presa come incertezza del valore medio della serie di misure.

9.5.2 Incertezza nella deviazione standard

Si può dimostrare che l'incertezza relativa di σ_x è data dalla seguente relazione

$$\varepsilon_{\sigma_x} = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}\,. \tag{9.27}$$

Questo risultato indica che con appena tre misure di una grandezza ($n = 3$) la deviazione standard ha un errore relativo del 50%. Per avere una indeterminazione del 10% bisogna avere 50 misure. Questo è il motivo per cui la deviazione standard va riportata con una o al più due cifre significative.

Lo stesso ragionamento di sopra vale anche per la deviazione standard della media $\sigma_{\bar{x}}$, in quanto essa si ottiene dividendo la deviazione standard σ_x per la radice quadrata del numero di misure $\sqrt{n}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\,. \tag{9.28}$$

Poiché $\sqrt{n}$ è un numero esatto, l'errore relativo di $\sigma_{\bar{x}}$ sarà uguale all'errore relativo di σ_x.

9.6 Ulteriori applicazioni del principio di massima verosimiglianza

Il principio di massima verosimiglianza ci consente di giustificare molte delle regole che abbiamo incontrato nei capitoli precedenti e di cui abbiamo dato solo delle giustificazioni qualitative basate più sull'aspetto pratico che su quello formale. Ciò ci ha consentito di giustificare la media come migliore stima del valore vero e la deviazione standard come migliore stima del parametro di larghezza della funzione di distribuzione di una serie di misure distribuite normalmente.

Abbiamo sempre detto, senza dare una giustificazione rigorosa, che se gli errori sono casuali e indipendenti si possono sommare in quadratura. Anche la giustificazione della somma in quadratura, per il calcolo degli errori nelle misure indirette, può essere data applicando il principio di massima verosimiglianza, così pure la media pesata può essere giustificata con simili argomentazioni basate sul principio di massima verosimiglianza. Il lettore interessato può trovare le dimostrazioni di quanto appena detto in J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori: lo studio delle incertezze nelle misure fisiche*, II Ed. Zanichelli (Bologna 1999).

9.7 Esercizi

Esercizio 9.1. Facendo uso delle tavole riportate in Appendice E, calcolare la probabilità di ottenere in una misurazione un risultato maggiore di 2.5σ dal valore medio.

$[P(x > 2.5\sigma) = (100 - 98.76)/2 = 0.62\%]$

Esercizio 9.2. Sia data una distribuzione gaussiana con valore centrale $X = 23$ e larghezza $\sigma = 1.6$. Facendo uso dette tabelle, calcolate la probabilità di ottenere una misura compresa nell'intervallo $21 < x < 25$. Inoltre supponendo di effettuare $N = 20$ misurazioni, calcolate quante misure vi aspettate di trovare nello stesso intervallo.

$[P(X < x < X + 1.25\ \sigma) = 39.44\%;\ n = (2 \times 39.44) \times 20/100 = 16 \text{ misure}]$

9.8 Quesiti

Quesito 9.1. Determinate la probabilità gaussiana di trovare una misura nell'intervallo $X - 2\sigma < x < X + 2\sigma$.

a. 0.999
b. 0.5
c. 0.954
d. 0.997
e. 0.683

[c. 0.954]

Quesito 9.2. Nella Figura 9.7, l'area grigia indica la probabilità $P(\text{entro } t\ \sigma)$ che una misura x cada entro $t\sigma$ dal valore centrale X. Se $t = 2\sigma$, quanto vale questa probabilità?

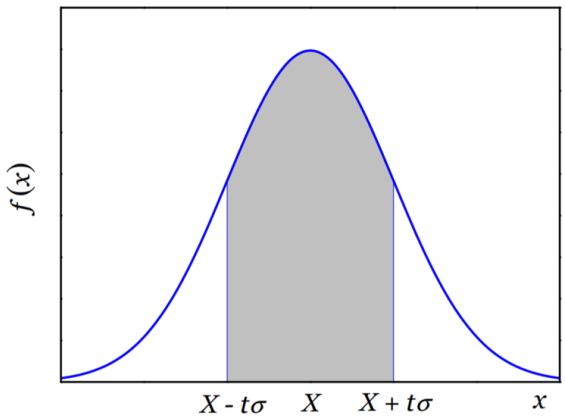


Figura 9.7: Gaussiana.

a. 99.7%
b. 68.3%
c. 95.4%
d. 100 %
e. è indeterminata

[c. 95.4%]

Capitolo 10

Considerazioni conclusive sugli errori

Indice

10.1 Interpretazione probabilistica dell'errore casuale 153

10.2 Errore statistico ed errore strumentale 154

10.3 Discrepanza e analisi statistica 156

Nei capitoli precedenti, abbiamo visto il significato della deviazione standard e della deviazione standard della media. Ritorniamo su questo punto con qualche esempio pratico.

10.1 Interpretazione probabilistica dell'errore casuale

Quando le misure sono influenzate da errori casuali e indipendenti, il loro istogramma tenderà ad assumere una distribuzione simmetrica a campana, la distribuzione normale, centrata sul valore medio $\overline{x}$ e larghezza σ_x. Dalle proprietà della funzione di Gauss, si ha che effettuando una ulteriore misurazione si avrà una probabilità (livello di confidenza)

- del 68.3% di ottenere un risultato compreso tra $(\overline{x} - \sigma_x) \leq x \leq (\overline{x} + \sigma_x)$,
- del 95.4% di ottenere un risultato compreso tra $(\overline{x} - 2\sigma_x) \leq x \leq (\overline{x} + 2\sigma_x)$,
- del 99.7% di ottenere un risultato compreso tra $(\overline{x} - 3\sigma_x) \leq x \leq (\overline{x} + 3\sigma_x)$.

Analogamente, il valor medio $\overline{x}$ di una serie di n misure avrà una probabilità (livello di confidenza)

- del 68.3% di essere compreso tra $(X - \sigma_x/\sqrt{n}) \leq \overline{x} \leq (X + \sigma_x/\sqrt{n})$,
- del 95.4% di essere compreso tra $(X - 2\sigma_x/\sqrt{n}) \leq \overline{x} \leq (X + 2\sigma_x/\sqrt{n})$,
- del 99.7% di essere compreso tra $(X - 3\sigma_x/\sqrt{n}) \leq \overline{x} \leq (X + 3\sigma_x/\sqrt{n})$,

dove X è il valore vero della grandezza oggetto delle misurazioni e $\sigma_x/\sqrt{n} = \sigma_{\overline{x}}$ è la deviazione standard della media della serie di misure.

Adesso, bisogna capire come questo tipo di errore, che abbiamo chiamato *errore statistico*, si confronta con l'errore strumentale. Se l'errore strumentale è molto più piccolo di $\sigma_{\overline{x}}$, allora è ragionevole riportare il risultato delle misurazioni come $x = \overline{x} \pm k\sigma_{\overline{x}}$, dove indichiamo con k il cosiddetto *parametro di copertura*. Per esempio, se scegliamo $k = 3$, avremo la probabilità del 99.7% di ottenere un risultato compreso tra $(X - 3\sigma_{\overline{x}}) \leq \overline{x} \leq (X + 3\sigma_{\overline{x}})$.

10.2 Errore statistico ed errore strumentale

Poiché l'errore statistico diminuisce all'aumentare del numero di misure, si potrebbe pensare di aumentare il numero di misure e ridurre in questo modo l'errore del valore medio fino al valore desiderato; al limite, si potrebbe pensare di ridurre l'errore a zero. Occorre rendersi conto che vi è un limite oltre il quale non ha più senso cercare di andare. Tale limite è legato all'errore strumentale, introdotto attraverso l'errore di precisione, l'errore di lettura e l'errore di taratura dello strumento,[1] che non possono essere eliminati ripetendo semplicemente le misurazioni nelle stesse condizioni sperimentali. Se l'errore statistico è più piccolo dell'errore strumentale, il risultato in questo caso riporterebbe una stima dell'incertezza non accettabile, in quanto il procedimento statistico ha portato a un risultato spinto al di la delle reali prestazioni dell'apparato sperimentale usato. Pertanto sulla base delle considerazioni fatte, bisogna esprimere correttamente la stima dell'errore in modo da tenere conto sia dell'errore statistico sia dell'errore strumentale. Siccome l'errore strumentale è un errore massimo, cioè ci dà la confidenza del 100% di trovare un risultato compreso tra $(X - \delta_{x_{stru}}) \leq x \leq (X + \delta_{x_{stru}})$, dobbiamo confrontare gli errori sulla base della stessa confidenza e cioè dobbiamo confrontare l'errore strumentale $\delta_{x_{stru}}$ con $\delta_{x_{stat}} = 3\sigma_x/\sqrt{n}$.

Ora, se sommassimo direttamente i due errori otterremmo l'errore massimo e avremmo in questa maniera una stima troppo pessimista dell'errore totale. Sommando in quadratura l'errore strumentale e l'errore statistico, si ottiene invece un valore più realistico dell'errore complessivo:

$$\delta_x = \sqrt{\delta^2_{x_{stru}} + \delta^2_{x_{stat}}}\,. \tag{10.1}$$

Poiché all'aumentare del numero di misurazioni l'incertezza strumentale non cambia e, inoltre, bisogna tenere conto che proseguire le misurazioni su tempi lunghi rende pro-

[1] L'origine di questi errori è discussa nel Capitolo 2.

blematico mantenere sempre le stesse condizioni sperimentali, nel ripetere molte volte le misurazioni si potrebbe correre il rischio di ottenere risultati in un intervallo di dispersione ancora più ampio!

Come abbiamo più volte detto, non possiamo pensare di migliorare la precisione della misura aumentando solamente il numero di misure, ma è necessario migliorare l'apparato sperimentale e ridurre in questo modo anche l'errore strumentale. In particolare, vi è un aspetto importante rispetto al quale il risultato espresso dalla (10.1) è realistico e istruttivo. Aumentando il numero di misure possiamo ridurre indefinitamente la componente casuale dell'errore di misura. Ma ogni apparato sperimentale ha un livello di precisione che non diminuisce all'aumentare del numero di misure. È chiaro dalla (10.1) che si guadagnerebbe poco da un'ulteriore riduzione di $\delta_{x_{stat}}$ nel caso in cui esso fosse più piccolo di $\delta_{x_{stru}}$. Pertanto, possiamo concludere con la seguente regola.

L'errore totale massimo nel risultato di una serie di misurazioni può essere ragionevolmente stimato sommando l'errore statistico $\delta_{x_{stat}} = 3\sigma_{\overline{x}} = 3\sigma_x/\sqrt{n}$ e l'errore strumentale $\delta_{x_{stru}}$ introdotto dagli strumenti di misura:

$$\delta_x = \delta_{x_{stat}} + \delta_{x_{stru}} \,. \tag{10.2}$$

Una stima più ragionevole si ottiene sommando in quadratura, dal momento che l'errore statistico e l'errore strumentale hanno origini completamente differenti che possiamo considerare indipendenti:

$$\delta_x = \sqrt{\delta^2_{x_{stat}} + \delta^2_{x_{stru}}} \,. \tag{10.3}$$

Questa regola, in pratica, afferma che per avere una significativa riduzione dell'incertezza è necessario apportare miglioramenti nelle tecniche e nell'apparato sperimentale per ridurre in ciascuna singola misura sia gli errori statistici sia quelli strumentali. Nella Tabella 10.1 sono schematizzati sinteticamente gli errori che influenzano il risultato di una misurazione.

Tabella 10.1: Schema riassuntivo degli errori che influenzano il risultato di una misurazione.

Errore strumentale: {	errore di lettura:	risoluzione
	errore di precisione: {	precisione (dispersione dei dati)
		accuratezza (taratura dello strumento)
Errore statistico: {	errore assoluto massimo (confidenza del 100%)	
	errore quadratico medio (confidenza del 68.3%)	

10.3 Discrepanza e analisi statistica

L'analisi statistica degli errori consente di stabilire quantitativamente il livello di accettabilità della discrepanza tra due valori, siano essi il risultato di due differenti misurazioni della stessa grandezza (per esempio, effettuate con due diversi apparati o da due diversi operatori) oppure siano essi uno il risultato di una misurazione e l'altro il valore atteso noto (o di riferimento), che può essere considerato privo di errore (o con errore trascurabile). Il livello di accettabilità può essere determinato sulla base della distribuzione dei valori misurati. Consideriamo il caso molto frequente in cui bisogna confrontare il risultato di una misurazione con un valore noto accertato. Per fare ciò, calcoliamo il parametro t come

$$t = \frac{|\overline{x} - x_0|}{\sigma_{\overline{x}}}\,, \tag{10.4}$$

dove $\overline{x}$ e σ_x indicano, rispettivamente, il valore medio e la deviazione standard della media delle misure e x_0 il valore noto. Il parametro t dà il numero di deviazioni standard per il quale il valore misurato $\overline{x}$ differisce da quello di riferimento x_0. Dall'integrale normale degli errori, è possibile calcolare la probabilità di ottenere un valore di x al di fuori dell'intervallo $(\overline{x} \pm t\sigma_{\overline{x}}) \leq x \leq (\overline{x} \pm t\sigma_{\overline{x}})$

$$P(x \text{ al di fuori di } \overline{x} \pm t\sigma_{\overline{x}}) = 1 - P(x \text{ entro } \overline{x} \pm t\sigma_{\overline{x}})\,. \tag{10.5}$$

Se la probabilità $P(x$ al di fuori di $\overline{x} \pm t\sigma_{\overline{x}})$ è sufficientemente alta (convenzionalmente maggiore del 5%) allora diremo che la discrepanza non è significativa. Se la probabilità $P(x$ al di fuori di $\overline{x} \pm t\sigma_{\overline{x}})$ è piccola (minore del 5%) è molto improbabile ottenere tali valori di t e la discrepanza è significativa al livello del 5%. Se poi $P(x$ al di fuori di $\overline{x} \pm t\sigma_{\overline{x}})$ è minore del 1%, diremo che la discrepanza è altamente significativa al livello del 1%. In altri termini, $\overline{x}$ non è ragionevolmente il valore vero attorno a cui le misure sono distribuite.

Esempio 10.1. Uno studente misura la densità ρ di un blocco di alluminio ottenendo $\rho = (2.79 \pm 0.12)$ g/cm^3.

Il valore teorico della densità dell'alluminio è $\rho_0 = 2.70$ g/cm^3. Per valutare la bontà del risultato ottenuto, lo studente calcola il parametro t, trasformando prima l'errore assoluto massimo δ_ρ in errore statistico $\sigma_\rho = \delta_\rho/3 = 0.04$ g/cm^3,

$$t = \frac{|\rho_{best} - \rho_0|}{\sigma_\rho} = 2.25\,. \tag{10.6}$$

Dalle tavole riportate in Appendice E, si trova la probabilità

$$P(x \text{ al di fuori di } \overline{x} \pm 2.25\ \sigma_\rho) = 1 - P(x \text{ entro } \overline{x} \pm 2.25\ \sigma_\rho) = 0.025 = 2.5\%\,. \tag{10.7}$$

Lo studente può concludere che la discrepanza è significativa al livello del 5%, ma non può dire che è altamente significativa al livello del 1%.

Appendice A

Esercizi di ricapitolazione

Esercizio A.1. Per determinate la densità di un cubo si misura il lato con un calibro decimale e la massa con una bilancia elettronica, con display a 3 cifre e precisione di 0.3% sulla lettura + 1 digit. Se le letture sono rispettivamente $l = 2$ cm ed $m = 27.5$ g, determinare la densità del materiale di cui è costituito il cubo e l'errore associato.

Soluzione. Il valore della densità è dato da

$$\rho = \frac{m}{l^3} = 3.4375 \text{ g/cm}^3 .$$

Per stimare l'errore nel valore di ρ, dobbiamo dapprima stimare l'errore strumentale nelle misure di m e di l. Considerato che il lato del cubo è misurato con un calibro decimale, possiamo ragionevolmente considerare un errore strumentale $\delta_l = 0.1$ mm. L'errore nella massa δ_m è dato dalla somma diretta dell'errore di precisione dello 0.3% sul valore misurato di 27.5 g più l'errore di lettura, corrispondente a una unità sull'ultima cifra significativa visualizzata dalla bilancia

$$\delta_m = \left(\frac{0.3}{100} \times 27.5 + 0.1 \right) \text{ g} \approx 0.18 \text{ g} .$$

Poiché gli errori nella massa e nel volume possono essere ragionevolmente considerati indipendenti e casuali, l'errore relativo della densità può essere determinato sommando in quadratura l'errore relativo della massa più tre volte l'errore relativo della lunghezza del lato

$$\varepsilon_\rho = \sqrt{(\varepsilon_m)^2 + (3\varepsilon_l)^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta_m}{m}\right)^2 + \left(3\,\frac{\delta_l}{l}\right)^2} = \sqrt{0.0065^2 + (3 \times 0.005)^2} = 0.0165 \approx 1.6\% ,$$

da cui ricaviamo l'errore assoluto

$$\delta_\rho = \rho \times \varepsilon_\rho = 3.438 \times 0.0165 \approx 0.056 \text{ g} .$$

Pertanto, il valore della densità risulta essere

$$\rho = (3.44 \pm 0.06)\ \mathrm{g/cm^3}\,.$$

Esercizio A.2. Per stimare il valore dell'accelerazione di gravità g, uno studente misura il tempo di caduta t di un oggetto da una torretta di altezza $h = (4.0 \pm 0.1)$ m ottenendo $t = (0.90 \pm 0.02)$ s. Sapendo che il moto dell'oggetto è descritto dalla relazione

$$y = \frac{1}{2} g t^2\,, \tag{A.1}$$

determinate il valore di g e la sua indeterminazione.

Soluzione. Il valore dell'accelerazione di gravità si ricava dall'equazione (A.1):

$$g = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \times 4}{0.90^2} = 9.88\ \mathrm{m/s^2}\,.$$

Assumendo che gli errori nella misura dell'altezza e nella misura del tempo siano indipendenti e casuali, l'errore relativo dell'accelerazione di gravità ε_g sarà dato dalla somma in quadratura dell'errore relativo $\varepsilon_h = \frac{0.1}{4} = 0.025$ e di due volte l'errore relativo $\varepsilon_t = \frac{0.02}{0.9} = 0.022$

$$\varepsilon_g = \sqrt{\varepsilon_h^2 + (2\varepsilon_t)^2} = \sqrt{0.025^2 + (2 \times 0.022)^2} = 0.051\,.$$

L'errore assoluto quindi sarà dato da

$$\delta_g = g \times \varepsilon_g = 9.88 \times 0.051 \approx 0.5\ \mathrm{m/s^2}\,.$$

Pertanto, il valore di g risulta essere

$$g = (9.9 \pm 0.5)\ \mathrm{m/s^2}\,.$$

Esercizio A.3. Per stimare la temperatura di un ambiente, uno studente misura la temperatura in diversi punti, ottenendo i seguenti risultati tutti espressi in °C:

25.5 26.2 26.0 25.5 24.5 26.0 25.0 26.2 24.8 25.0

a) Dite qual è la migliore stima della temperatura dell'ambiente e la sua indeterminazione.

b) Sapendo che le misure sono state effettuate con un termometro digitale a tre cifre, dite quanto è l'errore di lettura introdotto dal termometro.

Soluzione.

a) La migliore stima della temperatura si ottiene calcolando il valore medio, mentre l'indeterminazione si può stimare calcolando la deviazione standard della media. Il risultato della misura della temperatura risulta essere $T = (25.5 \pm 0.2)$°C. Se invece si vuole stimare l'errore massimo Δ_T, questo può essere ottenuto calcolando la semidispersione dei dati e cioè $\Delta_T = (T_{max} - T_{min})/2 \approx 0.8$°C.

b) L'errore di lettura introdotto dal termometro è uguale a una unità sulla cifra meno significativa visualizzata dallo strumento, che nel nostro caso corrisponde a 0.1°C.

Esercizio A.4. Si vuole determinare la costante elastica di una molla elicoidale. Per fare ciò, si tira la molla con una forza nota e si misura il corrispondente allungamento. I valori delle forze e gli allungamenti sono riportati nella seguente tabella:

Forza (N)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
Allungamento (cm)	0.7	1.4	2.0	2.5	3.2	3.8	4.5	5.0

L'indeterminazione sulla misura della forza è di 0.1 N e l'indeterminazione sugli allungamenti della molla è di 0.1 cm. Determinate la costante elastica della molla usando il metodo grafico. *Suggerimento: imporre il passaggio per lo zero.*

Soluzione.

$k = (157 \pm 4)$ N/m

Esercizio A.5. In un esperimento in cui una grandezza fisica x varia nel tempo con la seguente legge

$$x(t) = Ae^{-t/\tau}\,, \tag{A.2}$$

si osservano i seguenti valori:

x	80	40	30	10	4	2
δ_x	20	10	10	2	1	1
t (s)	0	3.5	6.0	11	16	20

Determinare graficamente i valori dei parametri A e τ con le loro incertezze. *Nota: l'errore nel tempo è trascurabile.*

Soluzione.

$$k_{best} = \frac{k_{max} + k_{min}}{2} = \frac{0.20 + 0.189}{2} = 0.209 \text{ s}^{-1}$$

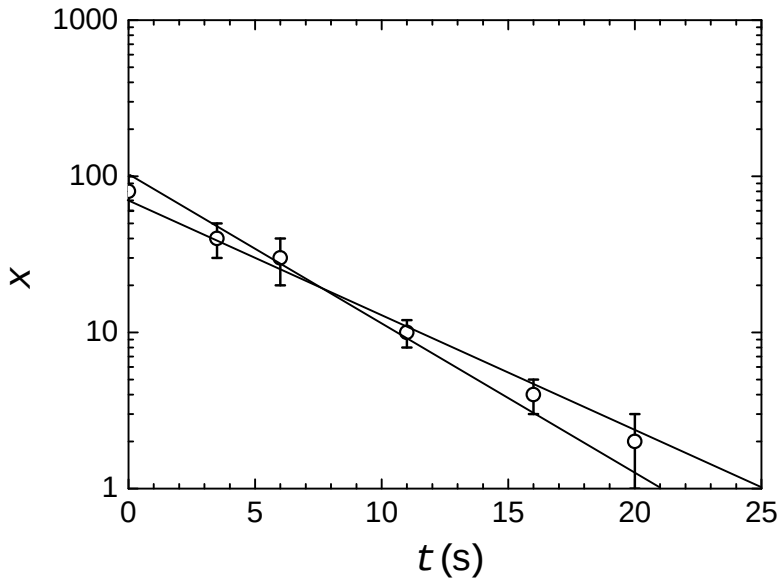


Figura A.1: Andamento della grandezza x in funzione del tempo.

$$\delta_k = \frac{k_{max} - k_{min}}{2} = \frac{0.20 - 0.189}{2} = 0.01 \text{ s}^{-1}$$

$$\varepsilon_k = 0.05$$

$$\tau_{best} = 5.0 \text{ s}$$

$$\delta_\tau = 0.05 \times 5 = 0.25 \text{ s}$$

Esercizio A.6. In un esperimento si misura una determinata grandezza x. Vengono acquisiti $N = 100$ valori, con i quali si ottiene l'istogramma normalizzato mostrato in Figura A.2. Determinate dall'istogramma il valore medio $\overline{x}$, la deviazione standard σ_x e la deviazione standard della media $\sigma_{\overline{x}}$.

Soluzione. Il valore medio è $\overline{x} = 0.55$, che corrisponde al valore centrale dell'istogramma. Per calcolare la deviazione standard, dobbiamo calcolare l'intervallo entro cui cadono il 68% di misure. Nel nostro caso, circa il 68% delle misure cade in un intervallo $\Delta = 0.4$ a cui corrispondono $2\sigma_x$. Quindi, $\sigma_x = 0.2$. Pertanto, la deviazione standard della media $\sigma_{\overline{x}}$ è data da

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = 0.02\,.$$

Esercizio A.7. Una distribuzione di misure può essere descritta dalla seguente funzione:

$$\begin{cases} f(x) = f_0 & \text{per} \quad 1 < x < 3 \\ f(x) = 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

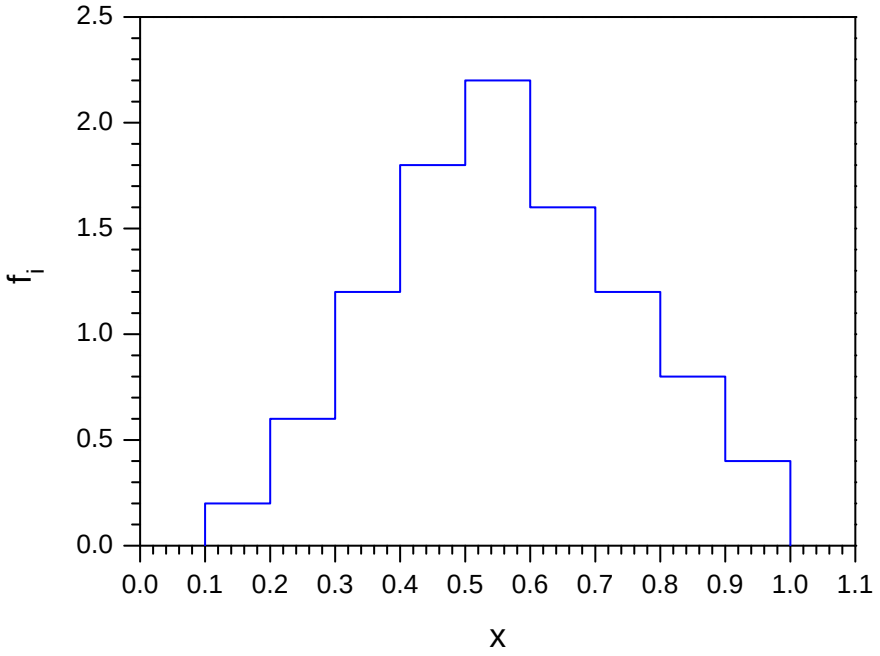


Figura A.2: Istogramma dei valori della grandezza x; il numero di misure è $N = 100$.

Determinate la costante di normalizzazione f_0, il valore centrale X e la larghezza σ della distribuzione.

Soluzione. La costante di normalizzazione f_0 si determina imponendo che l'area sottesa alla funzione sia uguale a uno.

$$2f_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad f_0 = 0.5$$

Il valore centrale si può determinare da considerazioni di simmetria e risulta essere $X = 2$. Infine, per determinare il parametro di larghezza bisogna risolvere il seguente integrale

$$\sigma^2 = \int_1^3 (x - X)^2 f_0 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

da cui si ottiene

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58$$

Esercizio A.8. Siano dati 2 dadi a quattro facce, numerate da 1 a 4. Indicando con u_1 l'uscita del primo dado e con u_2 l'uscita del secondo, si consideri la variabile somma data da: $u = u_1 + u_2$. Determinare la distribuzione di probabilità delle possibili uscite della variabile u.

Soluzione.

La distribuzione di probabilità si ottiene considerando tutte le possibili uscite della variabile u. La probabilità si ottiene dividendo il numero di casi favorevoli sul numero di casi totali.

$$
\begin{aligned}
u = 2 &\rightarrow P(2) = 0.0625 \\
u = 3 &\rightarrow P(3) = 0.125 \\
u = 4 &\rightarrow P(4) = 0.1875 \\
u = 5 &\rightarrow P(5) = 0.25 \\
u = 6 &\rightarrow P(6) = 0.1875 \\
u = 7 &\rightarrow P(7) = 0.125 \\
u = 8 &\rightarrow P(8) = 0.0625
\end{aligned}
$$

Appendice B

Elementi di teoria della probabilità e statistica

Indice

B.1 Definizione classica di probabilità 166

B.2 Definizione frequenzistica (o frequentista) di probabilità . . . 166

B.3 Teoria assiomatica delle probabilità 167

B.3.1 Probabilità condizionata 171

B.3.2 Eventi indipendenti 172

B.3.3 Eventi incompatibili o mutuamente esclusivi 172

B.4 La statistica 172

La probabilità è una grandezza che può assumere qualunque valore compreso tra 0 e 1; essa indica il grado di possibilità che un determinato evento si verifichi. La probabilità assume valore 1 se l'evento è certo, assume valore 0 se l'evento è impossibile.

La teoria della probabilità è la disciplina che si occupa di determinare quantitativamente il valore della probabilità nei vari casi che si possono verificare. I primi a occuparsi di probabilità furono Girolamo Cardano (1501 - 1576), Galileo Galilei (1564 - 1642), Pierre de Fermat (1601 - 1665), Blaise Pascal (1623 - 1662) e Christian Huyghens (1629 - 1695).

I primi studi erano legati al gioco d'azzardo e da queste poco nobili origini deriva il termine "aleatorio" (da *alea*, in latino *dado*) uno degli aggettivi più usati per definire il tipo di eventi oggetto del calcolo delle probabilità.[1] In seguito, Jacob Bernoulli (1655 -

[1] Un evento si dice *aleatorio* o *casuale* (*random*, in inglese) se il suo esito non è caratterizzato da alcuna prevedibilità.

1705), Abraham de Moivre (1667 - 1754), Thomas Bayes (1702 - 1761), Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) e Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) posero le basi della moderna teoria della probabilità.

B.1 Definizione classica di probabilità

Secondo la prima definizione di probabilità, attribuita a Laplace e per questo anche nota come *definizione classica di Laplace*,

> la probabilità di un evento A, indicata con $P(A)$, è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento n_A e il numero dei casi possibili n, purché questi ultimi siano egualmente possibili (equiprobabili):
>
> $$P(A) = \frac{n_A}{n}\,. \tag{B.1}$$

Per esempio, nel lancio di un dado le possibili uscite sono 1, 2, 3, 4, 5, 6. Quindi, il numero di uscite possibili è $n = 6$. Se indichiamo l'evento con $A =$ "numero pari" (cioè 2, 4, 6), allora si avrà $n_A = 3$. La probabilità $P(A)$ che l'evento A si verifichi è uguale a

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{6} = 0.5\,, \tag{B.2}$$

cioè, si ha la probabilità del 50% di ottenere un numero pari. Ovviamente, se il dado è irregolare, la probabilità delle varie facce non è uguale e quindi la definizione precedente non ci è di aiuto.

La definizione classica di probabilità consente di calcolare effettivamente la probabilità in molte situazioni; inoltre, è una definizione operativa e fornisce quindi un metodo per il calcolo. Tuttavia, essa presuppone un numero finito (discreto) di risultati possibili e di conseguenza non è utilizzabile nel continuo.

B.2 Definizione frequenzistica (o frequentista) di probabilità

Un altro modo di procedere per determinare la probabilità di verificarsi un determinato evento è *il metodo empirico*. Si lancia il dado moltissime volte e si calcola il numero di volte che ciascuna faccia esce (facendo attenzione a lanciare il dado "bene", cioè senza favorire anche involontariamente alcuna faccia). La probabilità può essere definita nel seguente modo.

> La probabilità di un evento A è il limite, al crescere all'infinito delle prove, della frequenza dell'evento (occorrenza frazionaria); cioè, è il limite del rapporto tra il numero delle prove n_A in cui l'evento A si verifica (numero di prove favorevoli) e il numero totale di prove n con n tendente a infinito:
>
> $$P(A) = \lim_{n\to\infty} = \frac{n_A}{n}\,. \tag{B.3}$$

La definizione di probabilità appena data è detta *definizione frequenzistica* (o *frequentista*); essa si applica a esperimenti ripetibili nelle medesime condizioni sperimentali, i cui risultati non siano ritenuti ugualmente possibili. Anche tale definizione consente di calcolare la probabilità di molti eventi e da essa si ricavano le stesse regole che seguono dalla definizione classica. È sufficiente, infatti, sostituire il rapporto tra numero dei casi favorevoli n_A e numero dei casi possibili n con il limite del rapporto per n tendente a infinito.

Come abbiamo appena visto, la definizione frequenzistica (o frequentista) si basa sulla cosiddetta *legge empirica del caso* o *legge dei grandi numeri*, secondo cui in una successione di prove ripetute, la frequenza di un evento si avvicina alla probabilità dell'evento stesso. Tuttavia, non sempre si possono fare un grande numero di prove ripetute, anzi a volte vorremmo conoscere la probabilità di eventi che non sono ripetibili. Per usare il calcolo della probabilità per questo tipo di eventi (non ripetibili) è stata introdotta, dal matematico italiano Bruno De Finetti (1906 - 1985), la *definizione soggettivista di probabilità*.

> La probabilità di determinato un evento è il grado di fiducia riposta nel verificarsi dell'evento stesso; essa dipende dalle informazioni note ed è variabile da soggetto a soggetto.

In altri termini, la probabilità di un evento A rappresenta la disponibilità di un individuo a pagare la quota di una scommessa, per riscuotere un importo unitario se si verifica l'evento A e riscuotere un importo nullo se non si verifica l'evento A.

B.3 Teoria assiomatica delle probabilità

Indipendentemente dalla definizione operativa di probabilità (classica, frequentista o soggettivista), Andrei Nikolaevic Kolmogorov[2] (1903 - 1987) introdusse nel 1933 la *definizione assiomatica di probabilità*. In essa, si evita di entrare nel significato di probabilità e si

[2] sognate un secondo . . . e fate.

considera solo l'aspetto matematico-formale, usando appunto il formalismo della teoria degli insiemi. Per poter capire capire meglio ciò, è necessario dare le seguenti definizioni.

- Si definisce uno spazio ambiente S di tutti i possibili valori che una grandezza (la variabile) può assumere relativamente a un determinato fenomeno, i cui sottoinsiemi rappresentano gli *eventi*: $S = \{A, B, C, \ldots\}$; nel lancio di un dado lo spazio ambiente, o anche detto semplicemente l'*insieme degli eventi*, è $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Si definisce l'unione di due eventi (simbolo $\cup$ od operatore logico OR) come l'occorrenza di almeno uno degli eventi dell'unione; in Figura B.1 è rappresentata l'unione di due eventi con un diagramma di Venn.

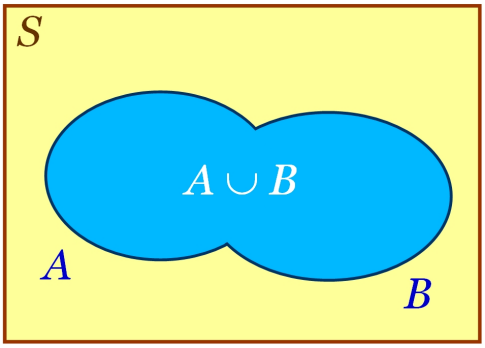


Figura B.1: Diagramma di Venn dell'unione di due eventi.

- Si definisce l'intersezione di due eventi (simbolo $\cap$ od operatore logico AND) come l'occorrenza di entrambi gli eventi dell'intersezione; in Figura B.2 è rappresentata l'intersezione di due eventi con un diagramma di Venn.

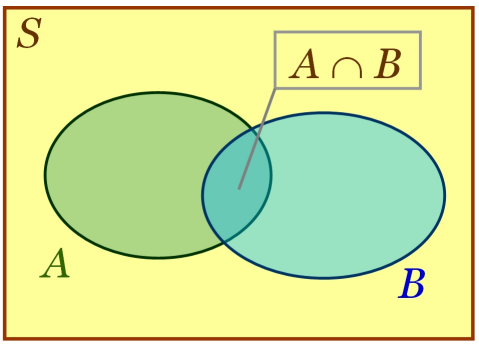


Figura B.2: Diagramma di Venn dell'intersezione di due eventi.

- Si definisce l'evento complementare $\bar{A}$ (operatore logico NOT) di un evento A come l'evento che ha le seguenti proprietà: $A \cup \bar{A} = S$ e $A \cap \bar{A} = \varnothing$, dove $\varnothing$ indica

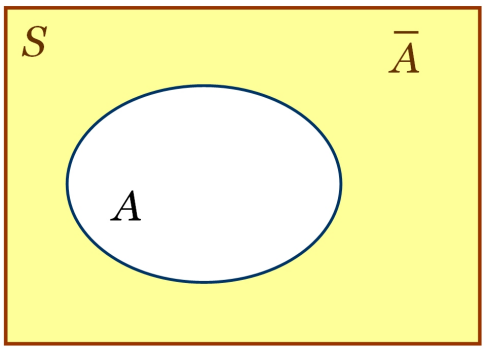


Figura B.3: Diagramma di Venn dell'evento complementare.

l'insieme vuoto; in Figura B.2 è rappresentato l'insieme complementare $\bar{A}$ con un diagramma di Venn.

Per definire la probabilità si parte dai seguenti assiomi.

Assioma I. A ogni evento corrisponde un sottoinsieme A di S, a cui è associato un numero reale $P(A)$ detto probabilità di A, con $0 \leq P(A) \leq 1$.

Assioma II. La probabilità dell'evento corrispondente allo spazio ambiente S è uguale a 1, cioè $P(S) = 1$.

Assioma III. Se l'intersezione tra gli eventi A e B è un insieme vuoto[3] ($A \cap B = \varnothing$), allora risulta: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Facciamo un semplice esempio. Lo spazio S sia l'insieme delle 40 carte di un mazzo di carte da briscola e gli eventi siano i sottoinsiemi di qualsiasi numero di carte, per esempio

a) i 4 assi,

b) le carte di denari,

c) il sottoinsieme composto dal 2 di bastoni e il 3 di spade.

Associamo a ciascun sottoinsieme la probabilità di estrarre una carta appartenente a esso, per esempio la probabilità associata al sottoinsieme a) è 1/10, quella associata al b) è 1/4, quella associata al c) è 1/20. Per illustrare l'Assioma III, pensiamo all'unione dei due sottoinsiemi b) e c): essi sono disgiunti, hanno cioè intersezione nulla, quindi per l'Assioma III la probabilità associata al sottoinsieme unione è 1/10 + 1/20 = 3/20.

[3]Se l'intersezione tra due insiemi è un insieme vuoto, essi si dicono *disgiunti*.

Come ulteriore applicazione del terzo Assioma, calcoliamo la probabilità che esca un numero qualsiasi lanciando un dado. Essendo $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, abbiamo

$$P(S) = 1 \tag{B.4}$$

ma anche

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \tag{B.5}$$

e risultando gli eventi equiprobabili si ricava

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}\,, \tag{B.6}$$

in accordo con la definizione classica.

A partire dagli assiomi di Kolmogorov, possono essere dedotti tutti i teoremi del calcolo delle probabilità. Tra i più semplici, vi sono i seguenti teoremi.

Teorema B.1. Per qualsiasi evento A (con A sottoinsieme di S) risulta:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})\,. \tag{B.7}$$

Si deduce dagli Assiomi II e III; infatti, per definizione si ha $A \cap \bar{A} = \varnothing$ e $A \cup \bar{A} = S$; per l'Assioma II si ha $P(S) = 1$ e per l'Assioma III si ha $1 = P(A) + P(\bar{A})$, da cui si ricava l'asserto.

Teorema B.2.

$$P(\varnothing) = 0\,. \tag{B.8}$$

Si deduce dall'Assioma II e dal Teorema 1; infatti, $\bar{\varnothing} = S$ e quindi $P(\varnothing) = 1 - P(\bar{\varnothing}) = 0$.

Teorema B.3. Se A è un sottoinsieme di B ($A \subseteq B$), allora si ha $P(A) \leq P(B)$.
Si deduce semplicemente dal fatto che A è un sottoinsieme di B.

Teorema B.4. Per qualsiasi coppia di eventi A e B risulta:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,. \tag{B.9}$$

Questo teorema è l'estensione dell'Assioma III al caso in cui i due eventi non siano disgiunti.

B.3.1 Probabilità condizionata

In generale, se S è lo spazio ambiente e A e B sono due eventi, si dice *probabilità dell'evento A condizionata al verificarsi dell'evento B* la probabilità di A valutata nello spazio degli eventi di B. Tale probabilità, indicata come $P(A|B)$, rappresenta la probabilità dell'evento A, nell'ipotesi che si sia verificato o che si verifichi l'evento B. In altre parole, il verificarsi dell'evento B può in qualche modo condizionare l'evento A. Si dimostra che

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{B.10}$$

e da questa si deduce

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)\,. \tag{B.11}$$

Si nota che lo spazio degli eventi per il calcolo di $P(A)$ è S, mentre per il calcolo di $P(A|B)$ lo spazio degli eventi è al massimo l'insieme B. Infatti, quando $A \cap B = B$ si ha $P(A \cap B) = P(B)$ e $P(A|B) = 1$.

Esempio B.1. Si vuole calcolare la probabilità che nel lancio di un dado esca 3, sotto l'ipotesi che esca un numero dispari. Indichiamo $A = \{3\}$ e $B = \{dispari\}$, con $P(A) = 1/6$ e $P(B) = 3/6$. La probabilità cercata sarà data da

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}\,, \tag{B.12}$$

in quanto $A \cap B = A$ e quindi $P(A \cap B) = P(A) = 1/6$. In Figura B.4 questo risultato è schematizzato con un diagramma di Venn.

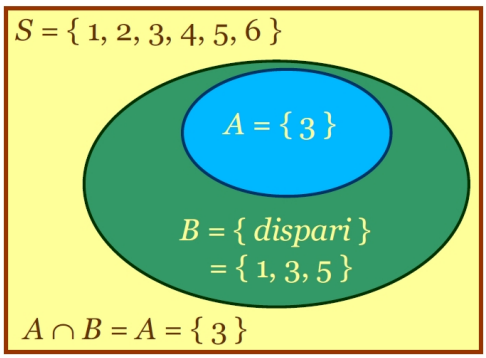


Figura B.4: Diagramma di Venn della probabilità che nel lancio di un dado esca 3, sotto l'ipotesi che esca un numero dispari.

B.3.2 Eventi indipendenti

Se $P(A|B) = P(A)$, se cioè la probabilità di un evento A non è influenzata dall'occorrenza di un evento B e viceversa, è facilmente dimostrabile che $P(B|A) = P(B)$ e diciamo che i due eventi sono *indipendenti* o anche *probabilisticamente indipendenti*.

Nel caso di eventi indipendenti, dalle precedenti equazioni deduciamo che

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)\,. \tag{B.13}$$

B.3.3 Eventi incompatibili o mutuamente esclusivi

Si noti che se due eventi A e B sono *incompatibili*, o *mutuamente esclusivi*, cioè se quando si verifica uno, non si verifica l'altro, ovvero se la loro intersezione è nulla ($A \cap B = \varnothing$), essi non sono indipendenti. In tal caso, per l'Assioma III si ha

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)\,. \tag{B.14}$$

B.4 La statistica

La necessità di dare delle definizione operative di probabilità si è presentata nella seconda metà del XIX secolo, quando il calcolo delle probabilità fu introdotto nello studio della statistica, che si occupa dello studio quantitativo delle caratteristiche di insiemi omogenei di oggetti (per esempio l'insieme degli abitanti di un paese, degli studenti di una classe, degli atomi in una stanza, delle misure di una grandezza, ecc.).

Il termine statistica deriva da "stato" e in origine era la scienza che descriveva numericamente uno stato (come è noto, i primi censimenti fatti per motivi militari o di tassazione risalgono agli albori della civiltà, per esempio quello riportato nel Libro dei Numeri, uno dei primi cinque libri della Bibbia).

Inizialmente, lo studio veniva effettuato considerando tutti gli individui della popolazione. Solo successivamente, per lo più nella seconda metà del XIX secolo, fu introdotto il calcolo delle probabilità nello studio della statistica. Tra i primi a propugnare questo passaggio furono Adolphe Quetelet (1796-1874), Siméon-Denis Poisson (1781-1840), Francis Galton (1822-1911) e Karl Pearson (1857-1936). Un insieme omogeneo di oggetti viene detto *popolazione*, un sottoinsieme della popolazione viene detto *campione*. In seguito a questa introduzione, lo studio della statistica poté essere fatto su campioni e non necessariamente su tutta la popolazione.

La statistica è divisa principalmente in due campi: la *statistica descrittiva* e la *statistica inferenziale* (da inferire, dedurre).

La statistica descrittiva si occupa della rappresentazione di fenomeni, con strumenti matematici come grafici e indici, sull'intera popolazione in cui si osserva il fenomeno.

La statistica inferenziale si occupa di descrivere un determinato fenomeno, in termini in termini probabilistici o statistici e cioè in termini di densità di distribuzione di probabilità e dei suoi parametri di media o valore atteso e varianza, sulla base delle osservazioni su un campione della popolazione.

L'analisi statistica di un fenomeno può essere condotta attraverso una o più grandezze, che consente di descrivere una popolazione (o un campione) relativa al fenomeno studiato.

Grandezze qualitative

Una grandezza qualitativa (o variabile qualitativa) può essere indicata solo con espressioni verbali (aggettivi, sostantivi, ecc.). Per esempio, il sesso di una persona può essere maschio o femmina; il tipo di lavoro svolto da un certo numero di persone può essere indicato solo con la qualifica verbale di esso: operaio, impiegato, ecc. A volte è possibile indicare grandezze qualitative con simboli numerici, per esempio gli impiegati statali sono classificati secondo categorie A, B, C e D previste dalla legge, tuttavia questi simboli numerici indicano sempre grandezze qualitative.

Grandezze quantitative

Una grandezza quantitativa (o variabile quantitativa) può essere indicata con valori o espressioni numeriche, può essere misurata e il risultato delle misurazioni può essere espresso in cifre. Una variabile quantitativa può essere continua o discreta:

continua, quando può assumere qualunque valore reale (appartenente all'insieme dei numeri reali), come la temperatura, il peso corporeo, ecc.

discreta, quando può assumere solo valori interi (appartenente all'insieme dei numeri interi), come il numero di componenti di una famiglia, il numero delle possibili uscite nel lancio di un dado, ecc.

In statistica, per potere descrivere fenomeni caratterizzati da entrambi i tipi di grandezze, qualitative o quantitative, per indicare una grandezza si usa il termine *carattere* e per indicare i valori che essa può assumere si usa il termine *modalità*. Infine, con il termine *classe* viene indicato un intervallo di valori della variabile.

Appendice C

Oscillatore armonico reale

Indice

C.1 Oscillatore armonico con molla di massa non trascurabile . . 175

C.2 Oscillatore viscoelastico 178

Un sistema oscillante viene generalmente descritto da un modello semplice che prevede oscillazioni armoniche descritte dalle funzioni seno o coseno, noto come *oscillatore armonico semplice*. Tuttavia, per descrivere i sistemi reali, il modello elementare dell'oscillatore armonico semplice non è sufficiente in quanto nei sistemi reali intervengono molteplici fattori che ne modificano il comportamento. In quest'Appendice verremo due casi in cui il comportamento dell'oscillatore reale si discosta significativamente da quello dell'oscillatore armonico semplice.

C.1 Oscillatore armonico con molla di massa non trascurabile

La descrizione dell'oscillatore armonico semplice composto da un corpo di massa M attaccato a una molla di costante elastica k e massa trascurabile è abbastanza semplice e si trova in tutti i libri di Fisica Generale. Consideriamo come esempio un oscillatore armonico ideale massa–molla, di costante elastica k e massa M, che oscilli verticalmente. Questo sistema segue la seconda legge di Newton ed è descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$M\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\, y(t) + k\, y(t) - Mg = 0 \tag{C.1}$$

che presenta una soluzione periodica del tipo

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{Mg}{k} \tag{C.2}$$

dove A è l'ampiezza delle oscillazioni, ϕ la costante di fase e ω_0 la frequenza angolare che dipende da k e da M come

$$\omega_0 = \sqrt{k/M} \tag{C.3}$$

La posizione della mass varia col tempo come una funzione sinusoidale attorno alla posizione di equilibrio $y_0 = Mg/k = g/{\omega_0}^2$, con ampiezza costante e frequenza indipendente dall'ampiezza delle oscillazioni. Dall'Equazione (C.2), si ottiene l'accelerazione:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\, y(t) = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{C.4}$$

dove $\omega_0^2 A$ descrive il valore massimo dell'accelerazione.

Vogliamo approfondire qui il caso in cui la molla ha una massa m non trascurabile rispetto alla massa M del corpo attaccato alla molla. A questo scopo, consideriamo una molla avente massa m uniformemente distribuita su tutta la sua lunghezza, alla quale è attaccato un oggetto di massa M. Durante il moto oscillatorio del corpo, si osserva che ciascuna sezione della molla si muove con velocità v_m differente dalla velocità v_M del corpo. Viene spontaneo, quindi, porsi la seguente domanda. Come la massa della molla influenza la dinamica del sistema?

Il problema della molla con massa viene risolto considerando una massa effettiva della molla, m_0, definita come la massa che deve essere aggiunta all'oggetto di massa M per prevedere correttamente il comportamento del sistema. Nel caso più semplice, supponendo una distribuzione lineare delle velocità dei segmenti di molla lungo la molla stessa, come vedremo più avanti si ricava che la massa effettiva della molla è uguale a un terzo della massa della molla, $m_0 = m/3$, indipendentemente dalla direzione di moto del sistema massa-molla.

Durante l'oscillazione, qualunque sia la direzione di oscillazione del sistema, quando l'oggetto passa dalla posizione di equilibrio, in cui la molla non è deformata, avrà un velocità v_M. I segmenti di molla avranno invece una velocità che dipende dalla loro posizione: il segmento attaccato alla massa avrà la stessa velocità v_M della massa M; il segmento attaccato alla parete avrà velocità nulla (vedi Figura C.1). Nell'approssimazione più semplice, la velocità dei vari segmenti di molla può essere descritta dalla seguente funzione lineare della distanza:

$$v_m(y) = \frac{y}{l_0}\, v_M\,, \tag{C.5}$$

dove $v_m(y)$ è la velocità del segmento di molla distante y dalla parete e v_M è velocità della massa M. Si può notare dall'Equazione (C.5) che se $y = 0$ si ha $v_m(y) = 0$, viceversa se $y = l_0$ si ha $v_m(y) = v_M$.

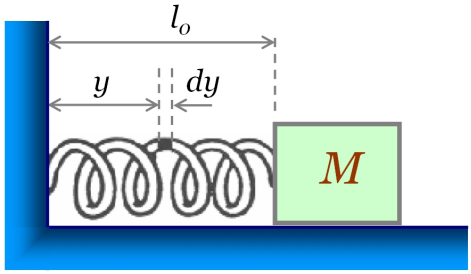


Figura C.1: Molla con massa. Si Noti che dy indica un segmento di molla e non un pezzettino del filo che costituisce la molla stessa.

Per determinare la massa effettiva della molla, calcoliamo l'energia cinetica della molla:

$$K_{molla} = \frac{1}{2}\int_0^{l_0} v_m(y)^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\frac{v_M^2}{l_0^2}\lambda \int_0^{l_0} y^2 \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\frac{m}{3}\,v_M^2\,, \tag{C.6}$$

dove abbiamo usato la relazione $dm = \lambda \mathrm{d}y$, con $\lambda = m/l_0$. Poiché per un oscillatore armonico si deve avere

$$K_{molla} + K_{oggetto} = U \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}\,\frac{m}{3}\,v_M^2 = \frac{1}{2}\,kA_0^2\,, \tag{C.7}$$

dove A_0 è l'ampiezza delle oscillazioni compiute dalla massa M; sostituendo $v_M = \omega A_0$ e semplificando, si ricava

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m/3}}\,. \tag{C.8}$$

Dalla relazione appena ricavata, si nota che la massa effettiva della molla è $m_0 = m/3$, da cui si ottiene il periodo di oscillazione del sistema massa-molla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + m/3}{k}}\,. \tag{C.9}$$

Questo risultato descrive abbastanza bene il comportamento della molla con massa. Tuttavia, poiché nella maggior parte dei casi $m \ll 3M$, la massa della molla m risulta trascurabile rispetto alla massa M del corpo e l'oscillatore può essere trattato come un oscillatore armonico semplice.

Per approfondire questo argomento, si possono consultare il seguente articolo:

- Rodriguez E. R., Gesnouin G. A. (2007). *Effettive mass of an oscillating spring.* Phys. Teac. **45**, 100-103.

C.2 Oscillatore viscoelastico

I materiali in gomma elastica soggetti a deformazione presentano caratteristiche sia viscose che elastiche; questa proprietà viene chiamata *viscoelasticità*. A differenza dei materiali puramente elastici che ritornano immediatamente allo stato originale una volta rimossa la sollecitazione, una sostanza viscoelastica ha una componente elastica e una componente viscosa che dissipa energia quando viene applicata una forza quindi rimossa.

Le proprietà viscoelastiche della gomma elastica sono legate al riarrangiamento delle molecole polimeriche che la compongono. Quando una forza viene applicata a un materiale viscoelastico come un polimero, parti della lunga catena polimerica cambiano posizione. Questo movimento o riarrangiamento è chiamato *creep* (scorrimento, strisciamento). Quando la forza esterna viene rimossa, il polimero torna alla sua forma originale[1].

Il moto oscillatorio che abbiamo descritto nella sezione precedente descrive sistemi ideali che oscillano indefinitamente sotto l'azione di una forza di richiamo lineare descritta dalla legge di Hooke. In tutti i sistemi meccanici reali, sono presenti forze di attrito che dissipano energia e quindi questi sistemi non oscillano indefinitamente. Quando è presente anche una forza di attrito proporzionale alla velocità, l'oscillatore è chiamato *oscillatore armonico smorzato*.

L'oscillatore ad elastico presenta un notevole attrito interno e allo stesso tempo proprietà elastiche. Pertanto, si può utilizzare un modello matematico semplificato per descrivere un oscillatore ad elastico, che si ottiene collegando in serie una molla ideale, di costante elastica k, e un elemento dissipatore, con attrito viscoso, di coefficiente β, che esercita una forza di attrito proporzionale alla velocità[2]:

$$F_v = -\beta v_y = -\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) \tag{C.10}$$

Questo oscillatore è descritto dalla seguente equazione differenziale, che si ottiene dall'Equazione (C.1) sommando i termini della forza viscosa dati dall'Equazione (C.10):

$$M\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y(t) - \beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) - k\, y(t) - Mg = 0 \tag{C.11}$$

che può essere riscritta nella seguente forma:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y(t) + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + \omega_0^2 y - g = 0 \tag{C.12}$$

[1] Il lettore che volesse approfondire questi argomenti, può consultare: Ferry J. (1980). *Viscoelastic Properties of Polymers*. Wiley, New York.

[2] La descrizione matematica generale dell'oscillatore armonico smorzato si trova in: Feynman R., Leighton R., Sands M. (2013). *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, New Millennium ed. (Edizione online del California Institute of Technology, a cura di Gottlieb M. A. e Pfeiffer R., Pasadena, CA), Cap. 24.

dove $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ è la frequenza angolare dell'oscillatore non smorzato, $\gamma = \beta/2M$ il coefficiente di smorzamento e g l'accelerazione di gravità.

Quando $\gamma < \omega_0$, la soluzione dell'Equazione (C.12) è la seguente:

$$y(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) + \frac{Mg}{k} \tag{C.13}$$

Questa è la cosiddetta *oscillazione smorzata*, poiché l'ampiezza A non è più costante ma decresce esponenzialmente in funzione del tempo [28, 11].

Dall'Equazione (C.13), si deduce che anche l'accelerazione varia periodicamente con il tempo nel seguente modo:

$$a(t) = Ae^{-\gamma t}[(\gamma^2 - \omega^2)\cos(\omega t + \phi) + 2\gamma\omega \sin(\omega t + \phi)] \tag{C.14}$$

Tuttavia, per semplicità, $a(t)$ può essere descritta dalla seguente funzione semplificata:

$$a(t) = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \tag{C.15}$$

dove a_0 è l'accelerazione al tempo $t = 0$ e $\phi = 0$.
La Figura C.2 mostra un grafico delle componenti dell'accelerazione a in funzione del tempo registrate con l'app phyphox.

Dunque, dalla misura di $a(t)$ si può ricavare il periodo di oscillazione T dell'oscillatore.

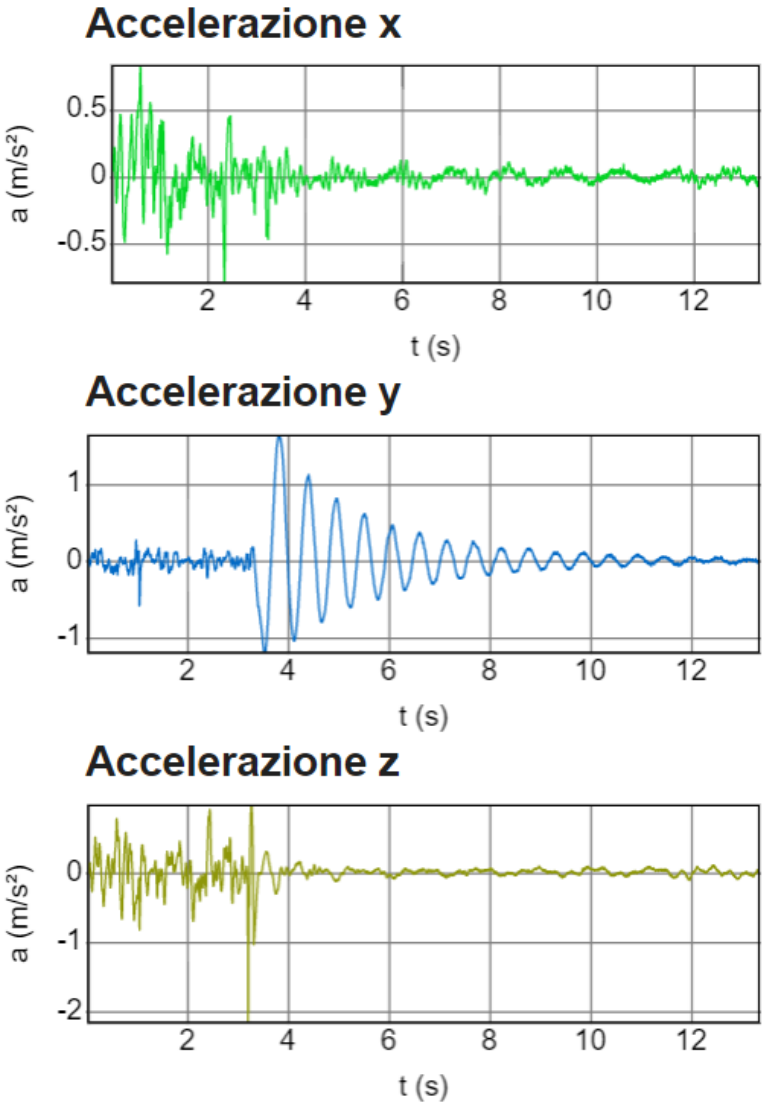


Figura C.2: Oscillazioni registrate con l'app phyphox. Il periodo di oscillazione è $T \approx 0.59$ s. Le componenti dell'accelerazione a_x e a_z sono praticamente nulle, in quanto l'oscillazione avviene lungo la direzione verticale indicata dalla componente y.

Appendice D

Metodo dei minimi quadrati

Nel Capitolo 6, abbiamo visto che per trovare la retta che meglio si adatta a tutti i punti sperimentali riportati in grafico si può determinare "a occhio" la retta che passa per i rettangoli individuati dagli errori associati ai punti sperimentali e tracciarla in modo empirico. Tuttavia, questo criterio è abbastanza grossolano e spesso dipende dall'abilità dell'operatore nell'applicare il metodo di analisi grafica. Si può ricorrere a un metodo analitico più rigoroso. La scelta che si può fare è allora quella di individuare la retta che renda minima una certa quantità. Di solito, si sceglie la retta che minimizza la somma dei quadrati degli scarti tra le ordinate misurate sperimentalmente e le ordinate dei punti della retta aventi le medesime ascisse dei punti sperimentali. Descriviamo meglio la procedura. Sia x_i un valore misurato della variabile x e sia y_i il valore di y misurato in corrispondenza del valore di x_i; sia $y_i = f(x_i)$ il valore dell'ordinata del punto di ascissa x_i di una generica retta r: $y = f(x) = mx + q$; vogliamo trovare i valori di m e di q che rendono minima la somma degli scarti quadratici $[y_i - f(x_i)]^2$. Quella così definita prende il nome di *retta dei minimi quadrati*. I coefficienti di questa retta possono essere calcolati derivando la somma degli scarti quadratici rispetto ai coefficienti m e q e ponendo il risultato delle derivate uguale a zero:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial m} \sum_i (y_i - mx_i - q)^2 &= 0 \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial q} \sum_i (y_i - mx_i - q)^2 &= 0 \end{cases} \tag{D.1}$$

Risolvendo il sistema di sopra, si ottengono le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} m = \dfrac{n\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{\sum_i x_i^2 \left(\sum_i x_i\right)} \\ \\ q = \dfrac{\sum_i y_i}{n} - \dfrac{m\sum_i x_i}{n} = \overline{y} - m\overline{x} \end{cases} \tag{D.2}$$

Nel caso in cui la retta debba passare per l'origine degli assi cartesiani, la sua equazione diviene più semplice, in quanto in questo caso si ha $q = 0$ e l'unico coefficiente m si ricava mediante la seguente espressione

$$m = \frac{n\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}\,. \tag{D.3}$$

Le espressioni per il calcolo dei coefficienti della retta che si adatta meglio ai dati sperimentali, che abbiamo appena riportato, possono essere facilmente calcolati mediante un foglio elettronico e molte calcolatrici tascabili che hanno incorporata la procedura per determinare proprio la retta dei minimi quadrati.

Il fatto che questa procedura sia comoda e diffusa, tuttavia, non significa che sia sempre corretto adoperarla. Infatti, essa non tiene in alcun conto la presenza degli errori sulla variabile x e, se le incertezze sulle misure della variabile y non sono tutte uguali, ignora le differenze esistenti. In sostanza, il calcolo della retta dei minimi quadrati presuppone che siano trascurabili gli errori sulla variabile indipendente e tutti eguali tra loro quelli sulla variabile dipendente; quando queste condizioni non ricorrono e non è pratico usare procedure più complicate, può essere più opportuno ricorrere semplicemente al metodo grafico, descritto nel Capitolo 6.

Appendice E

Integrale normale degli errori

L'integrale della funzione di Gauss è chiamato *integrale normale degli errori*; esso dà la probabilità che una misura cada nell'intervallo $(X - t\sigma) \leq x \leq (X + t\sigma)$, cioè la probabilità che una misura cada entro t deviazioni standard da entrambi i lati del valore vero X. La probabilità che una misura cada al di fuori dell'intervallo considerato sopra può essere trovata come differenza nel seguente modo

$$P(x \text{ al di fuori di } X \pm t\sigma) = 1 - P(x \text{ entro } X \pm t\sigma)\,. \tag{E.1}$$

Nella Tabella E.1 sono riportati i valori della probabilità percentuale $P(\text{entro } t\sigma)$ in funzione di t, dal valore $t = 0$ al valore $t = 4$; per valori maggiori di t, si può assumere che a probabilità $P(\text{entro } t\sigma)$ sia del 100%.

Tabella E.1: Probabilità percentuale P(entro $t\sigma$) in funzione di t.

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.80	1.60	2.39	3.19	3.99	4.78	5.58	6.38	7.17
0.1	7.97	8.76	9.55	10.34	11.13	11.92	12.71	13.50	14.28	15.07
0.2	15.85	16.63	17.41	18.19	18.97	19.74	20.51	21.28	22.05	22.82
0.3	23.58	24.34	25.10	25.86	26.61	27.37	28.12	28.86	29.61	30.35
0.4	31.08	31.82	32.55	33.28	34.01	34.73	35.45	36.16	36.68	37.59
0.5	38.29	38.99	39.69	40.39	41.08	41.77	42.45	43.13	43.81	44.48
0.6	45.15	45.81	46.47	47.13	47.78	48.43	49.07	49.71	50.35	50.98
0.7	51.61	52.23	52.85	53.46	54.07	54.67	55.27	55.87	56.46	57.05
0.8	57.63	58.21	58.78	59.35	59.91	60.47	61.02	61.57	62.11	62.65
0.9	63.19	63.72	64.24	64.76	65.28	65.79	66.29	66.80	67.29	67.78
1.0	68.27		69.23		70.17		71.09		71.99	
1.1	72.87		73.73		74.57		75.40		76.20	
1.2	76.99		77.75		78.50		79.23		79.95	
1.3	80.64		80.98		81.65		82.62		83.24	
1.4	83.85		84.44		85.01		85.57		86.11	
1.5	86.64		87.15		86.64		88.12		88.59	
1.6	89.04		89.48		89.90		90.31		90.70	
1.7	91.09		91.46		91.81		92.16		92.49	
1.8	92.81		93.12		93.42		93.71		93.99	
1.9	94.26		94.51		94.76		95.00		95.23	
2.0	95.45									
2.5	98.76									
3.0	99.73									
4.0	99.994									
5.0	99.99994									

Appendice F

Il calibro a corsoio e il calibro Palmer

Indice

F.1 Calibro a corsoio 185

F.2 Calibro Palmer o micrometro 190

In laboratorio si ha spesso necessità di dover misurare dimensioni di oggetti piccoli. Uno strumento che ci permette di fare ciò con una notevole precisione è il calibro. Esistono vari tipi di calibri, quelli più usati sono il *calibro a corsoio* e il *calibro Palmer*. Il calibro a corsoio, per esempio, consente di effettuare la misurazione diretta di lunghezze esterne, interne e di profondità; questa sua versatilità lo rende uno strumento indispensabile in un laboratorio di Fisica.

F.1 Calibro a corsoio

Il calibro a corsoio è uno strumento che consente di rilevare piccole lunghezze. Esso è realizzato interamente in acciaio inossidabile ed è composto da un'asta fissa graduata in millimetri e in pollici, detta *regolo*, sulla quale scorre una parte mobile, il *corsoio*, da cui deriva in nome *calibro a corsoio*. Nella Figura F.1 è mostrato un calibro a corsoio per misure lineari. Sul corsoio è incisa una particolare scala graduata, detta *nonio* dal nome dell'astronomo e matematico portoghese Pedro Núñes (Petrus Nonius, 1502 – 1577) che publicò nel 1542 un trattato, *De Crepusculis*, in cui descriveva il principio su cui si basa il nonio.[1] Il ritratto di Pedro Núñes è mostrato nella Figura F.2.

[1] Per un approfondimento storico sullo sviluppo del nonio si può consultare: A. Estácio dos Reis, *Navios e navegações - Portugal e o Mar. The Nonius of Pedro Núñes*, Oceanos **38** (1999) (Disponibile online: cvc.instituto-camoes.pt/ciencia_eng/e20c.html).

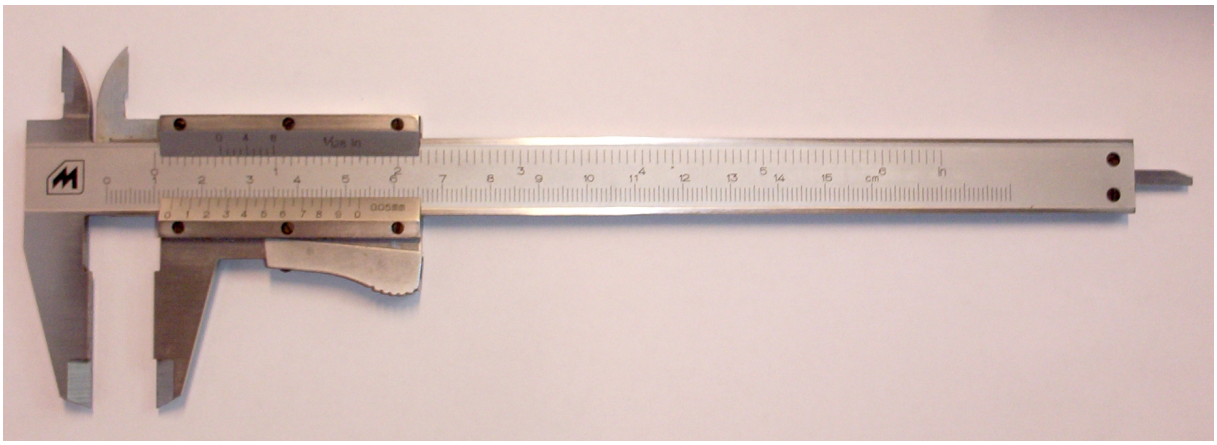


Figura F.1: Calibro a corsoio analogico.

Il nonio fu ulteriormente perfezionato dal matematico francese Pierre Vernier (1580 – 1637), descritto nel libro *Construction, l'usage et les propriétés du quadrant nouveau de mathématique* del 1631, da cui deriva il nome di *verniero*. Per migliorare le possibilità di lettura delle scale graduate, moltissimi strumenti di misura sono equipaggiati con un opportuno nonio.

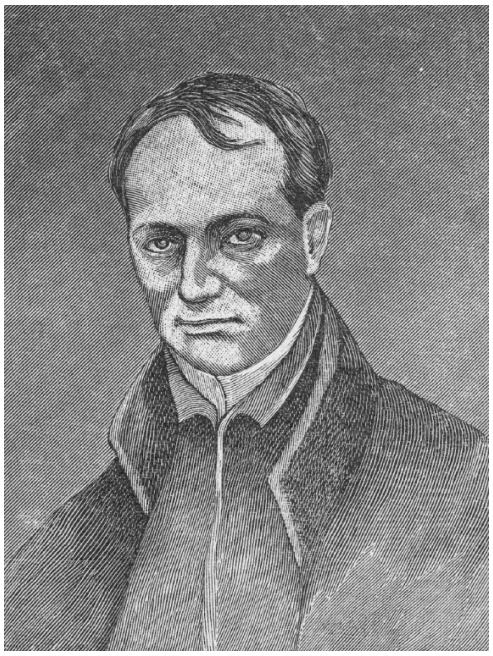


Figura F.2: Ritratto di Pedro Núñes (1492 – 1577), astronomo e matematico portoghese.

Il calibro a corsoio per misure lineari permette di effettuare le seguenti misurazioni:

- dimensioni esterne di oggetti posti tra i becchi grandi;
- dimensioni interne di oggetti posti tra i becchi piccoli;

- distanza tra due livelli di un oggetto, individuata dalla parte estrema del regolo e dall'estremo di un'assicella solidale al corsoio.

La misura viene letta sulla scala graduata incisa sul regolo, in corrispondenza con la tacca dello zero del corsoio. Limitandosi a questo semplice metodo di lettura, l'errore di lettura, uguale a metà della risoluzione della scala del regolo, risulterebbe essere δ_l = 0.5 mm, come nel caso di una semplice riga graduata in millimetri. Tuttavia, poiché la lavorazione meccanica con cui sono realizzate le varie parti dello strumento è molto accurata, si possono effettuare misure molto precise mediante l'uso del nonio.

La scala del nonio, incisa sul corsoio, è costituita da una serie di n incisioni equidistanti, la prima delle quali indica lo zero. Indicando con D la distanza tra due tacche consecutive della scala sul regolo e con d la distanza tra due tacche consecutive del nonio, tra le due quantità si ha la seguente relazione

$$(n-1)D = nd\,. \tag{F.1}$$

Dall'Equazione (F.1), si ricava la relazione

$$D - d = \frac{D}{n}\,. \tag{F.2}$$

La quantità D/n rappresenta la risoluzione dello strumento. Per la scala metrica, quando $D = 1$ mm ed $n = 10$ si ha $D/n = 1/10 = 0.1$ mm e, quindi, la risoluzione dello strumento è 0.1 mm/div.

Quando lo zero del nonio coincide con una certa divisione del regolo, la prima divisione del nonio si troverà arretrata di D/n rispetto alla successiva del regolo, la seconda di $2D/n$, la terza $3D/n$, ecc. Se invece è, per esempio, la terza divisione del nonio che coincide con una del regolo, la seconda divisione del nonio avrà sorpassato la precedente divisione del regolo di D/n, la prima di $2D/n$ e lo zero del nonio di $3D/n$. In generale quindi, se effettuando una misurazione si osserva che la *k-esima* divisione del nonio meglio coincide con una divisione qualsiasi del regolo, il valore della misura sarà dato dalla divisione del regolo che precede immediatamente lo zero del nonio, più kD/n.

Per facilitare la lettura, la lunghezza del nonio può essere doppia (nonio doppio). Il nonio ventesimale doppio divide una lunghezza di 39 mm in 20 parti uguali. La distanza fra due tacche del nonio doppio vale 39/20 = 1.95 mm, con una risoluzione sempre 0.05 mm.

Il tipo di calibro usato più frequentemente ha una portata di circa 160 mm e un nonio ventesimale ($n = 20$) e, quindi, una risoluzione di 1/20 = 0.05 mm/div. Nella Figura F.3(a) è rappresentato un nonio ventesimale ($n = 20$) nella posizione in cui la misura è 0.00 mm, nella Figura F.3(b) quando la misura è 6.25 mm.

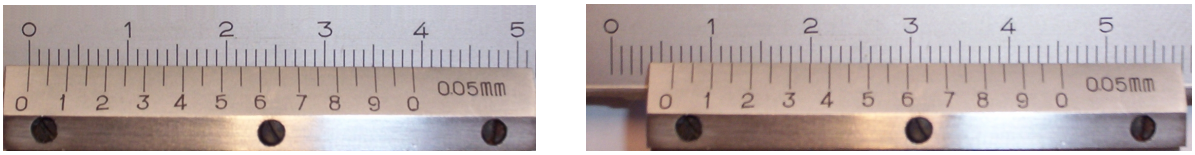


Figura F.3: Nonio ventesimale ($n = 20$); (a) posizione in cui la misura è 0.00 mm; (b) posizione in cui la misura è 6.25 mm.

Esistono calibri a corsoio con vari tipi di nonio: calibro a nonio decimale (con risoluzione di 0.1 mm/div), calibro ventesimale (con risoluzione di 0.05 mm/div), calibro cinquantesimale (con risoluzione di 0.02 mm/div) e calibro centesimale (con risoluzione di 0.01 mm/div).

Si noti che, mentre la precisione dello strumento dipende dalla lavorazione meccanica con cui esso è realizzato, la risoluzione è una proprietà della scala graduata e dipende dalla possibilità di marcare accuratamente la graduazione.[2] Da tale limite dipende, infatti, la coincidenza di una sola divisione del nonio con una del regolo. Se le coincidenze appaiono essere più di una, aumentare n per diminuire l'errore di lettura non aiuta molto. Poiché con il calibro a corsoio la misura viene lettà guardando la coincidenza della di una divisione del nonio con una del regolo, l'errore di lettura non può essere determinato dalla risoluzione, ma dipende dalla bontà della marcatura della graduazione del nonio e del regolo (spessore e distanziamento delle tacche). Per questo motivo, per gli strumenti in cui è presente il nonio il costruttore fa sì che l'errore strumentale (errore di precisione e di lettura) corrisponda con la risoluzione dello strumento.

Poiché il calibro, come abbiamo appena visto, è uno strumento che consente di effettuare misure molto precise, durante il suo uso occorre fare attenzione a due possibili errori sistematici:

- eventuale presenza di piccoli corpi tra l'oggetto in misura e le ganasce; per esempio, la presenza di granelli di polvere, limatura metallica ecc. è causa di errori sistematici nella lettura, dando valori maggiori per dimensioni esterne e minori per quelle interne;

- esercitare una pressione eccessiva nel fare aderire le ganasce all'oggetto che si vuole misurare può comportare, a seconda delle proprietà meccaniche di quest'ultimo, una sua deformazione che provoca errori sistematici in senso opposto a quelli descritti nel punto precedente.

[2]Ricordiamo al lettore che la sensibilità di uno strumento è definita come il rapporto tra la variazione dell'indicazione data dallo strumento e la variazione della grandezza che ha determinato quella variazione di indicazione (v. Par. 2.2).

Con lo sviluppo della tecnologia, è stato possibile realizzare anche il calibro a corsoio digitale. La Figura F.4 mostra un calibro digitale centesimale con l'indicazione della misura di 15.35 mm. Le caratteristiche tecniche di un generico calibro digitale sono riportate nella Tabella F.1.



Figura F.4: Calibro a corsoio digitale.

Tabella F.1: Caratteristiche tecniche di un generico calibro digitale centesimale.

Measurement unit :	mm
Measuring range :	0 – 150 mm
Resolution :	0.01 mm
Accuracy (0 – 100 mm) :	± 0.02 mm
Accuracy (100 – 150 mm) :	± 0.03 mm
Maximum measuring speed :	1.5 m/s
Measuring system :	liner capacitive measuring system
Display :	LCD display
Operating temperature :	from +5°C to +40°C
Influence of humidity :	from 0% to 80% relative humidity irrelevant

F.2 Calibro Palmer o micrometro

Il *calibro Palmer*, detto anche *micrometro*, prende il nome dall'ingegnere francese Jean-Laurent Palmer, che perfezionò lo strumento nella versione attuale e lo brevettò il 7/9/1848. Il calibro Palmer è realizzato sulla base della vite micrometrica ideata nel 1640, dall'astronomo inglese William Gascoigne (1612 – 1644), che per primo costruì un cannocchiale con micrometro incorporato per la misura delle distanze stellari.[3]

Il calibro Palmer ha una portata di pochi centimetri e può essere impiegato solo per misurazioni di dimensioni esterne. È composto di un pezzo massiccio, e quindi molto rigido, di acciaio, foggiato a ferro di cavallo (v. Figura F.5). A una delle sue estremità vi è un appoggio fisso, **A**, mentre l'altra estremità reca una madrevite, **M**, entro cui può scorrere una vite la cui estremità interna, **B**, è l'altro riferimento per la misura. L'estremità esterna, **T**, è foggiata a tamburo e reca incise 50 divisioni ugualmente spaziate. Sul cilindro esterno della madrevite vi è una scala graduata in divisioni spaziate di 0.5 mm, pari al passo della vite. Poiché la rotazione del tamburo può essere letta con un errore di 1/50 di giro, si ha un errore di lettura $\delta_l = 1/50 \times 0.50$ mm $= 10^{-2}$ mm. La precisione dello strumento, adeguata a questo valore di δ_l, è legata alla bontà della lavorazione meccanica della vite e della madrevite che, per questa ragione, entrambe non possono superare qualche centimetro di lunghezza.

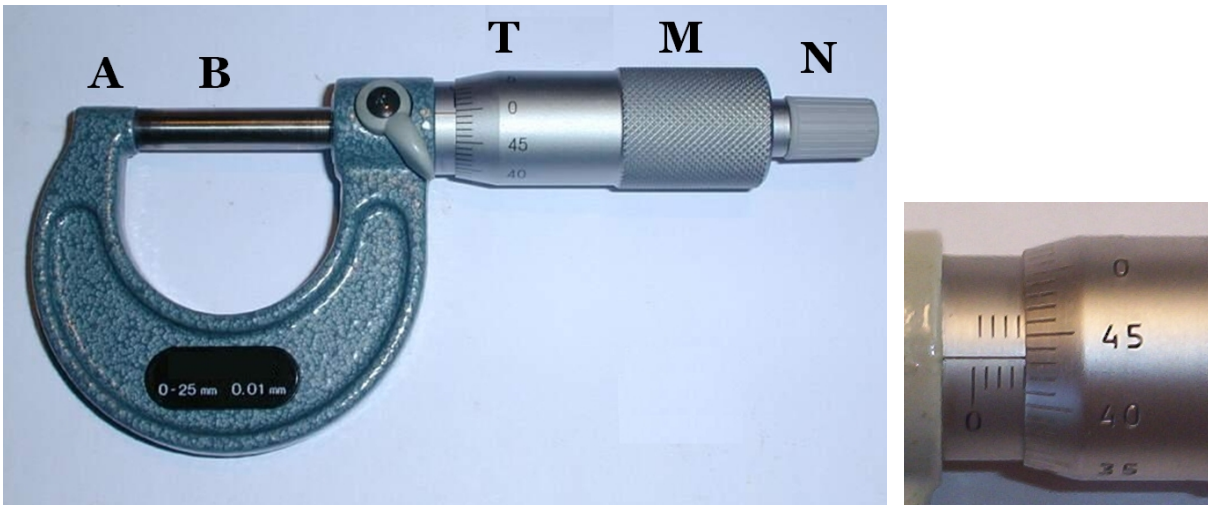


Figura F.5: Calibro Palmer o micrometro; nella figura di destra, lo strumento indica la misura di 4.43 mm.

[3]Per un approfondimento storico sullo sviluppo del micrometro, si veda: www.lindahall.org/jean-laurent-palmer.

Data l'elevata precisione dello strumento occorre sempre eseguire, per prima cosa, la lettura di zero, cioè la lettura quando non viene interposto alcun oggetto tra **A** e **B**, e poi quella con l'oggetto. La misura dello spessore sarà la differenza tra le due. Anche in questo caso, si possono verificare gli errori sistematici citati per il calibro. Per evitare di commettere errori sistematici dovuti all'eccessivo avvitamento della vite, nel calibro Palmer non si agisce direttamente sul tamburo **T**, ma su un nottolino **N** collegato a **T** per mezzo di un meccanismo a frizione regolabile. Si può così fare aderire l'estremità della vite all'oggetto che si vuole misurare sempre con la stessa pressione, indipendentemente dall'operatore.

Appendice G

Acquisizione dati con i sensori *real time*

Indice

G.1 Vernier Graphical Analysis 193

G.2 Sensore di movimento Go Direct 196

G.2.1 Caratteristiche tecniche del sensore 198

Con lo sviluppo delle tecnologie informatiche, è stato possibile realizzare particolari interfacce capaci di controllare in modalità remota svariati tipi di sensori per l'acquisizione automatica di grandezze fisiche grazie anche allo sviluppo di specifici software (piattaforme informatiche) per l'acquisizione ed elaborazione dati. In quest'Appendice verrà spiegato come usare il sensore di movimento Go Direct della Vernier controllato da PC con il programma gratuito Vernier Graphical Analysis.

G.1 Vernier Graphical Analysis

La piattaforma Vernier Graphical Analysis è stata sviluppato per acquisire i dati rilevati da svariati sensori della Vernier di ultima generazione. La piattaforma consente agli studenti di effettuare anche l'analisi dei dati raccolti negli esperimenti di laboratorio. Questi sensori possono essere collegati al PC con cavo, attraverso la porta USB, oppure in modalità wireless, grazie alla tecnologia Bluetooth. Nella Figura G.1 sono elencate le istruzioni da seguire per il collegamento al PC di un sensore Vernier tramite la porta USB.

1. Connect the sensor to the USB port of the computer.
2. Launch Graphical Analysis.
   - The app will load a default data-collection setup.
3. If your sensor has multiple sensor channels, follow these instructions to change the default settings.
   - Click or tap Sensor Setup, .
   - Click or tap ▸ SENSOR CHANNELS.
   - Select the sensor channels you want to use.
   - Click or tap DONE.
4. You are now ready to continue your experiment.

Figura G.1: Istruzioni per il collegamento al PC di un sensore Vernier tramite la porta USB (www.vernier.com).

Dopo aver installato il pacchetto software, al primo avvio verrà visualizzata la schermata mostrata in Figura G.2, in cui sono presenti vari comandi per attivare le relative funzioni.

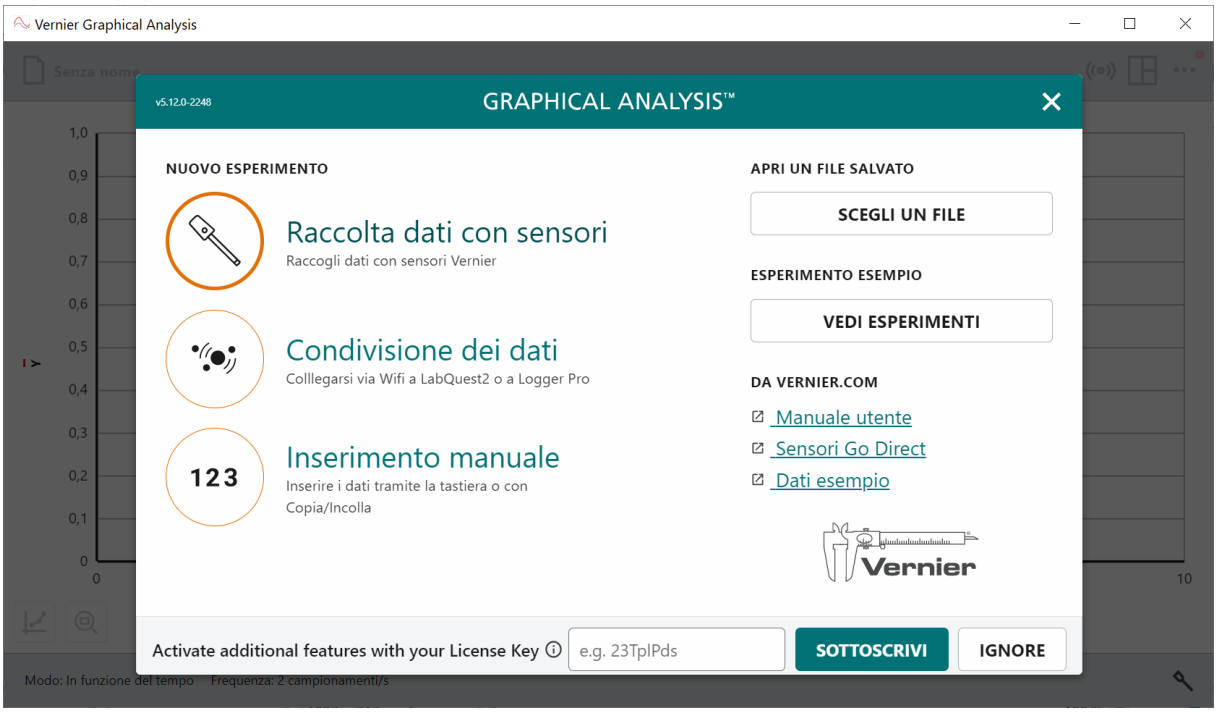


Figura G.2: Schermata di avvio della piattaforma Graphical Analysis(www.vernier.com).

Se viene avviato il programma con il sensore di movimento, verrà visualizzata la schermata mostrata in Figura G.3, in cui è presente già il grafico dove verranno visualizzati i dati acquisiti.

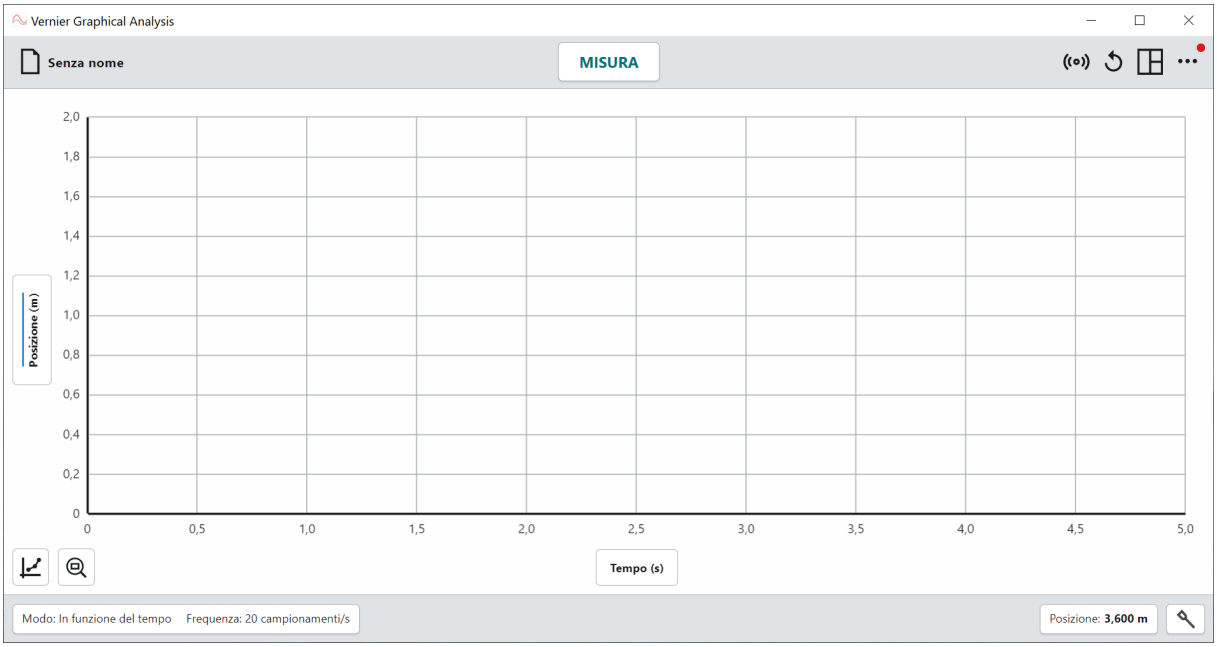


Figura G.3: Schermata di avvio della piattaforma Graphical Analysis con il sensore di movimento collegato al PC tramite la porta USB (www.vernier.com).

Qui di seguito descriviamo le principali funzioni, le altre sono consultabili nel manuale d'uso disponibile al seguente link: www.vernier.com/products/graphical-analysis/.

Raccolta dati con sensori (Sensor Data Collection). Per impostare l'acquisizione dati con i sensori Vernier.

Condivisione dei dati (Data Sharing). Per impostare la piattafoprma Graphical Analysis per ricevere dati in modalità wireless da un'altra piattaforma di condivisione dati.

Inserimento manuale (Manual Entry). Per avviare un esperimento in cui i dati vengono inseriti manualmente nella piattaforma. Si può usare questa funzione per analizzare dati che non sono acquisiti direttamente dai sensori Vernier ma che provengono da un altro esperimento descritto nei libri di testo o reperiti in internet.

Altre opzioni (Other Options).

- **Apri un file salvato (Open Saved Files).** Per aprire file nel formato della piattaforma Graphical Analysis (`.gambl` o `.ambl`), oppure file nel formato *comma separated value* (`.csv`).

- **Vedi esperimenti (Sample Data).** Per avere accesso a esempi di dati acquisiti con la piattaforma Graphical Analysis.

Le principali funzioni della piattaforma sono indicate nella Figura G.4.

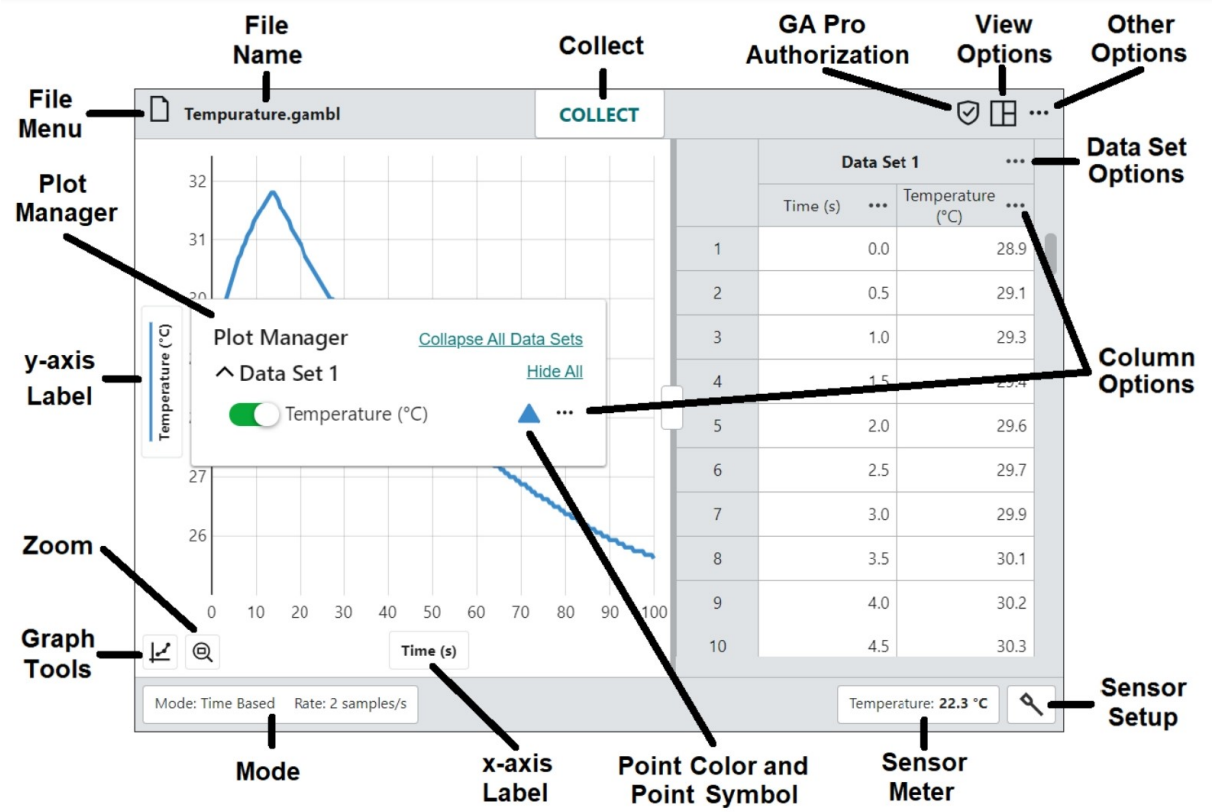


Figura G.4: Funzioni principali della piattaforma Graphical Analysis (www.vernier.com).

Per maggiori informazioni sul programma Vernier Graphical Analysis, consultare i siti:

- www.vernier.com/products/graphical-analysis/
- www.vernier.com/support/manuals/

G.2 Sensore di movimento Go Direct

Il sensore di movimento Go Direct della Vernier, mostrato in Figura G.5, utilizza un doppio sistema a ultrasuoni per misurare posizione, velocità e accelerazione di oggetti in movimento distanti da 15 cm fino a 2.5 m. Il sensore ha incorporato un sistema automatico di compensazione temperatura che tiene conto della differente velocità di propagazione del suono alle varie temperature.

Il sensore può essere utilizzato in vari esperimenti: studio della posizione, velocità e accelerazione di carrelli su rotaia; moto armonico semplice di un oscillatore massa-molla, ecc.



Figura G.5: Sensore di movimento Vernier Go Direct (www.vernier.com).

Per aprire il pannello per le impostazioni dei sensori bisogna cliccare sul pulsante in basso a sinistra nel pannello mostrato nella Figura G.4. Nella Figura G.6 è mostrato il pannello relativo al sensore di movimento Go Direct. Per questo sensore sono previste tre opzioni.



Figura G.6: Pannello per le impostazioni del sensore di movimento Go Direct.

G.2.1 Caratteristiche tecniche del sensore

- Massima velocità di raccolta dati: 30 campionamenti al secondo.
- Distanze rilevabili da 15 cm a 2.5 m.
- Risoluzione 1 mm.
- Errore di precisione 2 mm.
- Sistema automatico di compensazione temperatura.
- Porta USB per il collegamento al PC con cavo.
- Tecnologia Bluetooth per il collegamento al PC in modalità wireless.

Per maggiori informazioni sul sensore di movimento Go Direct, consultare il manuale disponibile ai seguenti link:

- www.vernier.com/product/go-direct-motion-detector/
- www.vernier.com/manuals/gdx-md/
- YouTube: *Using the Go Direct Motion Detector*

Appendice H

Acquisizione dati con l'uso dello smartphone

Indice

H.1 Misura del periodo di oscillazione di un oscillatore armonico massa-molla 200

H.2 Misura della velocità angolare di un dispositivo rotante a basso attrito 202

Per lo studio di molti fenomeni fisici, viste le difficoltà che spesso si incontrano per effettuare esperimenti in laboratorio, si può ricorrere alle nuove tecnologie e in particolare all'uso dello smartphone. Questi dispositivi sono dotati di vari sensori (fotocamera, microfono, accelerometro, giroscopio, magnetometro, ecc.) e possono quindi essere utilizzati in esperimenti scientifici per effettuare misure di grandezze fisiche. Ciò offre la possibilità di progettare e esperienze didattiche a basso costo, in cui dispositivi costosi possono essere sostituiti da smartphone.

In quest'Appendice presenteremo due esempi. Uno riguarda l'uso dell'accelerometro dello smartphone, per misurare il periodo di oscillazione di un oscillatore armonico massa-molla; L'altro riguarda l'uso del giroscopio, per misurare la velocità di rotazione di un dispositivo rotante.

H.1 Misura del periodo di oscillazione di un oscillatore armonico massa-molla

La misurazione della costante elastica mediante un oscillatore verticale di massa elastica è un'attività standard di scuola-laboratorio. Tradizionalmente, il periodo di oscillazione del sistema molla-massa viene misurato manualmente con un cronometro. In questo esempio, vediamo come utilizzare l'accelerometro dello smartphone controllato dall'app gratuita phyphox (acronimo di PHYsical PHOne eXperiment). La Figura H.1 mostra una parte dello screenshot dell'app phyphox, con l'elenco dei sensori dello smartphone usati dall'app.



Figura H.1: Parte dello screenshot dell'app phyphox che mostra l'elenco dei sensori dello smartphone usati.

L'accelerometro alloggiato nello smartphone è solitamente un sistema microelettromeccanico (MEMS), che elabora il sistema meccanico in informazioni elettriche. Una descrizione più dettagliata dell'accelerometro, da un punto di vista didattico, è data in (Agliolo Gallitto & Lupo). L'accelerometro misura l'accelerazione gravitazionale come una forza che agisce su una massa campione, quindi riporterà i valori dell'accelerazione di gravità g mentre lo smartphone è a riposo. In realtà, l'accelerazione è zero quando lo smartphone è fermo (o si muove a velocità costante). Per segnalare un'accelerazione di valore zero mentre lo smartphone non è accelerato, l'app Phyphox dispone di una specifica funzione denominata "Accelerazione (senza g)", che utilizza un sensore virtuale che sottrae l'accelerazione costante g (di solito tenendo conto anche dei dati di altri sensori). Infine, phyphox consente di visualizzare e controllare anche in modalità remota in tem-

po reale, abilitando l'accesso allo smartphone da un computer connesso alla stessa rete internet.

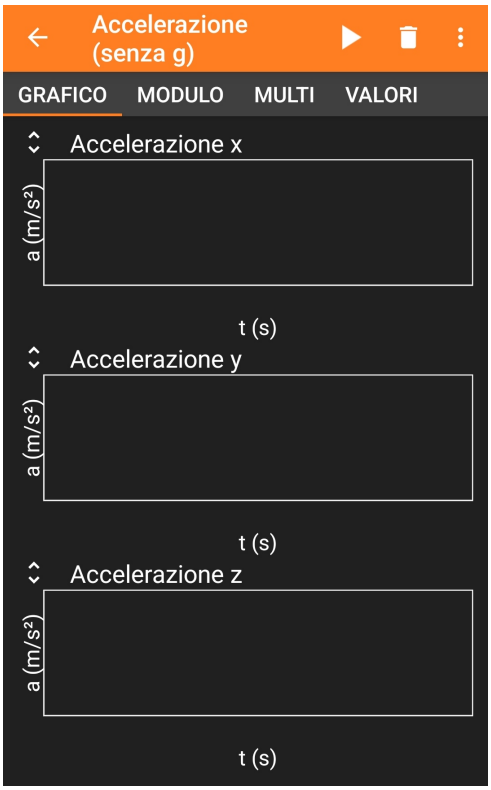


Figura H.2: Screenshot dell'app phyphox che mostra il pannello per la misura dell'accelerazione (senza g).

Nell'esperimento proposto utilizziamo uno smartphone con l'app Phyphox per la misura del periodo di oscillazione del sistema molla-massa con masse diverse, da cui determiniamo la costante elastica della molla elicoidale. Una foto del setup sperimentale è mostrata in Figura H.3. Lo smartphone è appeso a una molla elicoidale che può oscillare verticalmente quasi liberamente. Lo smartphone è fissato al supporto in PVC espanso appositamente costruito, con una massa totale di 175 g (questo valore dipende dallo smartphone usato). La massa dell'oscillatore può essere modificata aggiungendo pesi, modificando così la frequenza di oscillazione. L'app phyphox riporta le tre componenti dell'accelerazione dello smartphone a intervalli di tempo regolari di circa 0.01 s. Come mostrato in Figura H.3, le oscillazioni avvengono lungo l'asse verticale delle y. Inoltre, i valori dell'accelerazione lungo gli assi x e z rimangono molto vicini allo zero. L'app consente inoltre di salvare i dati grezzi di output in un file, dal quale i dati possono essere utilizzati per ulteriori analisi. Consultando le caratteristiche tecniche dello smartphone utilizzato nell'esperimento, che si accede cliccando sul tasto " i " in alto a destra nella schermata principale dell'app, si possono trovare informazioni per una stima delle incer-

tezze nelle misure. Negli smartphone di ultima generazione, l'errore di precisione nelle misure dei tempi introdotto dallo smartphone in genere varia da circa 0.005 s a circa 0.01 s; l'errore di precisione nelle misure dell'accelerazione è di circa 0.01 m/s^2. L'errore di lettura dello smartphone può essere considerato trascurabile.

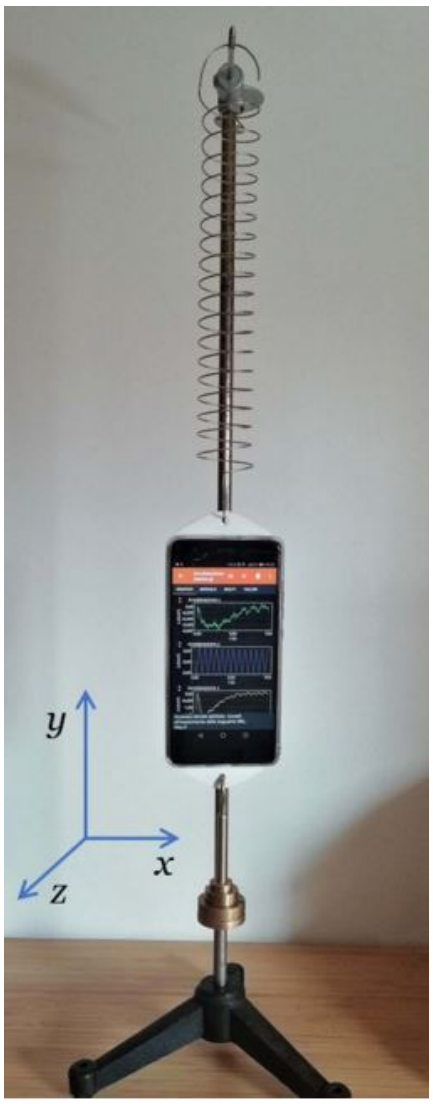


Figura H.3: Apparato per la misura della costante elastica della molla (Agliolo Gallitto et al, 2021).

H.2 Misura della velocità angolare di un dispositivo rotante a basso attrito

Uno smartphone su cui è installata l'app gratuita phyphox (phyphox.org). L'app phyphox consente di registrare la velocità angolare, ω, in funzione del tempo, anche in modalità

remota su notebook, abilitando l'accesso allo smartphone attraverso una rete internet sicura.

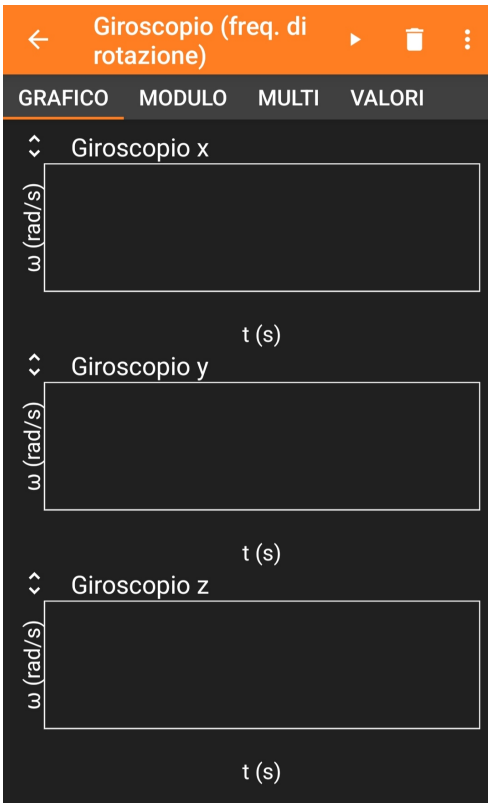


Figura H.4: Screenshot dell'app phyphox che mostra il pannello per la misura della velocità angolare.

Consultando le caratteristiche tecniche dello smartphone utilizzato nell'esperimento, che si accede cliccando sul tasto " i " in alto a destra nella schermata principale dell'app, si possono trovare informazioni per una stima delle incertezze nelle misure. Negli smartphone di ultima generazione, l'errore di precisione nelle misure dei tempi introdotto dallo smartphone in genere varia da circa 0.005 s a circa 0.01 s; l'errore nella misura di ω è di circa 5×10^{-4} rad/s. L'errore di lettura dello smartphone può essere considerato trascurabile.

Per maggiori informazioni si può consultare i seguenti riferimenti bibliografici.

- Agliolo Gallitto A. & Lupo L. (2015). *A mechanical model of the smartphone's accelerometer*. Phys. Educ. **50**, 646-647.
- Agliolo Gallitto A. et al (2021). *Dynamic measurement of the elastic constant of an helicoidal spring by a smartphone.* Phys. Educ. **56**, 035010.
- Staacks S. et al (2018). *Advanced tools for smartphone-based experiments: phyphox.* Phys. Educ. **53**, 045009.

Appendice I

Foglio di calcolo

Indice

I.1 Riferimenti tra celle 205
I.2 Riferimenti relativi e riferimenti assoluti 206

Il *foglio di calcolo* o *foglio elettronico* (in inglese *spreadsheet*) è una tabella in cui il contenuto numerico delle singole celle può essere elaborato per mezzo di funzioni matematiche, cioè si possono creare relazioni funzionali tra celle. Esso permette di organizzare dati inseriti nelle celle, impostare calcoli per l'elaborazione dei dati inseriti e quindi visualizzare i risultati con grafici e tabelle riassuntive. Il foglio di calcolo è costituito da *colonne*, identificate da una lettera, e da *righe*, identificate da numeri; tali numeri e lettere costituiscono, rispettivamente, le intestazioni di riga e di colonna. L'intersezione di una riga con una colonna individua una *cella*, indicata dalla lettera della colonna e dal numero della riga (Figura I.1).

I fogli di calcolo più diffusi sono Microsoft Excel, Apache OpenOffice Calc e LibreOffice Calc. Il primo è un software commerciale mentre gli altri due sono software *open source*. Essi sono tutti basati sullo stesso criterio relazionale tra celle. Ciascuno offre particolari soluzioni che possono essere più o meno utili a seconda del lavoro che si intende svolgere.

I.1 Riferimenti tra celle

Le celle sono le unità fondamentali del foglio di calcolo. Esse possono contenere dati, etichette o relazioni funzionali tra celle, chiamate *riferimenti*. Come si vede in Figura I.1, le celle `A1` e `B1` contengono dati, mentre la cella `C1` contiene il riferimento alle celle `A1` e `B1`, indicato nella barra dei riferimenti, con la relazione funzionale `C1=A1+B1`. Nella cella

`C1` sarà visualizzato un numero solo se le celle `A1` e `B1` contengono dei numeri, altrimenti verrà visualizzato un messaggio di errore. Per conoscere il reale contenuto di una cella è sufficiente cliccare su quella cella: il suo contenuto sarà visualizzato nella barra dei riferimenti, come mostrato in Figura I.1. Nelle celle si possono inserire dati di diverso formato. L'elenco dei formati previsti in Excel è mostrato in Figura I.2.

Un riferimento identifica una cella o un intervallo di celle in un foglio di lavoro. Grazie ai riferimenti, in una sola formula è possibile utilizzare i dati contenuti in diverse parti di un foglio di lavoro oppure il valore di un'unica cella in più formule. È inoltre possibile fare riferimento a celle di altri fogli della stessa cartella di lavoro, ad altre cartelle di lavoro e a dati presenti in altri programmi. I riferimenti a celle in altre cartelle di lavoro sono denominati *riferimenti esterni* e i riferimenti ai dati di altri programmi sono denominati *riferimenti remoti*.

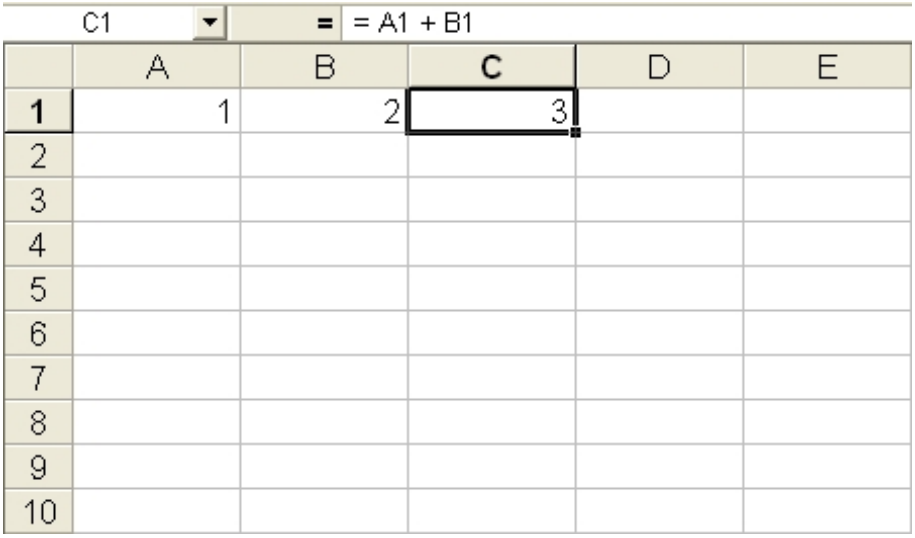


Figura I.1: Foglio di calcolo; nel foglio è selezionata la cella **C1** che contiene il riferimento **C1=A1+B1**, indicato nella barra dei riferimenti.

I.2 Riferimenti relativi e riferimenti assoluti

In base all'operazione che si desidera eseguire con il foglio di calcolo, è possibile utilizzare *riferimenti relativi*, che identificano le celle in relazione alla posizione della cella che contiene la formula, oppure *riferimenti assoluti*, che identificano sempre le celle presenti in una posizione specifica. I riferimenti relativi vengono adattati automaticamente quando vengono copiati, mentre i riferimenti assoluti rimangano immutati.

Quando si crea una formula, i riferimenti relativi alle celle o agli intervalli si baseranno sulla posizione di questi rispetto alla cella contenente la formula. In questo esempio, la

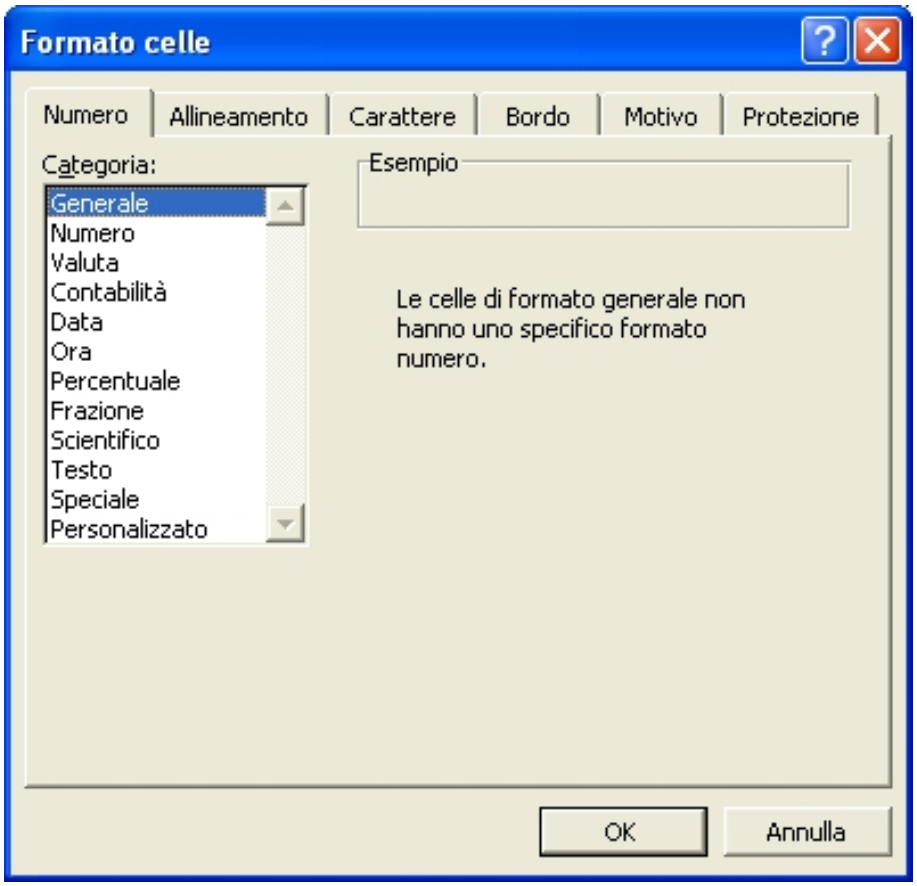


Figura I.2: Elenco dei formati previsti in Excel.

cella `C1` contiene la formula `=A1+B1`. Quando si copia una formula che utilizza riferimenti relativi, i riferimenti della formula incollata verranno modificati automaticamente per adeguarsi alla nuova posizione della formula. Se la formula contenuta nella cella `C1`, ovvero `=A1+B1`, viene copiata nella cella `C2`, la formula automaticamente diventerà `=A2+B2`.

Se si desidera che i riferimenti non vengano adeguati durante la copia di una formula in una cella differente, bisogna utilizzare un riferimento assoluto. Se la formula nella cella `C1`, ovvero `=A1+B1`, viene copiata nella cella `C2`, verranno adeguati entrambi i riferimenti. È possibile creare un riferimento assoluto alle celle `A1` e `B1` anteponendo il simbolo di dollaro ($) alle parti del riferimento che si desidera lasciare inalterato. Per creare, per esempio, un riferimento assoluto alle celle `A1` e `B1`, bisogna aggiungere il simbolo di dollaro alla formula `=$A$1+$B$1`. Il riferimento sarà, in questo caso, sempre alle celle `A1` e `B1`.

In conclusione, per fare riferimento a una cella, bisogna scrivere la lettera della colonna seguita dal numero di riga. Per esempio, `D50` si riferisce alla cella posizionata all'intersezione tra la colonna `D` e la riga `50`. Per fare riferimento a un intervallo di celle, invece bisogna scrivere il riferimento della cella nell'angolo superiore sinistro dell'intervallo, i due punti (:) e quindi il riferimento della cella nell'angolo inferiore destro. Per esempio, per

fare riferimento a un intervallo di celle delimitato dalle colonne da `A` a `E` e dalle righe da `10` a `20` bisogna scrivere `A10:E20`. Di seguito sono riportati ulteriori esempi di riferimenti che possono essere attuati.

Esempio I.1. Per fare riferimento alla cella corrispondente all'intersezione della colonna `A` e della riga `10` bisogna scrivere `A10`. Per fare riferimento a un intervallo di celle delimitato dalla colonna `A` e dalle righe da `10` a `20` bisogna scrivere `A10:A20`. Per fare riferimento a un intervallo di celle delimitato dalla riga `15` e dalle colonne da `B` a `E` bisogna scrivere `B15:E15`. Per fare riferimento a tutte le celle della riga `5` bisogna scrivere `5:5`. Per fare riferimento a tutte le celle delle righe da `5` a `10` bisogna scrivere `5:10`. Per fare riferimento a tutte le celle della colonna `H` bisogna scrivere `H:H`. Per fare riferimento a tutte le celle delle colonne da `H` a `J` bisogna scrivere `H:J`. Infine, per fare riferimento a un intervallo di celle delimitato dalle colonne da `A` a `E` e dalle righe da `10` a `20` bisogna scrivere `A10:E20`.

Infine, è possibile utilizzare le etichette delle righe e delle colonne di un foglio di lavoro per fare riferimento alle celle delimitate da tali righe e colonne. "Prezzo", "Quantità" e "Totale" sono esempi di etichette utilizzabili. In alternativa, è possibile assegnare nomi descrittivi che rappresentino celle, intervalli di celle, formule o valori costanti.

Per una descrizione dettagliata delle funzioni che gli specifici fogli di calcolo permettono di realizzare, si consiglia di consultare i relativi manuali.

Appendice J

Analisi e rappresentazione grafica di dati: il programma SciDAVis

Per analizzare agevolmente i dati raccolti negli esperimenti, si possono usare diversi programmi applicativi. Qualcuno lo abbiamo già descritto nell'Appendice I, qui descriveremo brevemente il programma SciDAVis il quale offre molte funzionalità per l'analisi e la rappresentazione grafica di dati sperimentali;[1] per questo motivo, questo programma risulta essere uno strumento indispensabile per l'attività di laboratorio. SciDAVis è un'applicazione *open source* per l'analisi dati e la loro rappresentazione grafica, con una facile interfaccia utente. L'acronimo SciDAVis deriva da: **Sci**entific **D**ata **A**nalysis and **Vis**ualization. Questa applicazione è simile ad altre applicazioni Windows proprietarie, come Origin e SigmaPlot, e altre applicazioni libere, come QtiPlot e LabPlot.

Con SciDAVis si possono creare differenti tipi di grafici 2D e 3D (grafici a linee, a punti, a barre, a torta e grafici di superfici) a partire da colonne di dati importati da file ASCII,[2] inseriti manualmente o calcolati usando formule. I dati sono organizzati in un particolare foglio di calcolo (spreadsheet) organizzato in tabelle con dati incolonnati (generalmente valori X e Y per grafici 2D) oppure in matrici (per grafici 3D). I fogli di calcolo, i grafici e le note sono raccolti insieme in un progetto e possono essere organizzate usando le cartelle.

---

[1] Tutte le informazione riportate qui di seguito sono state tratta dal manuale d'uso e i vari tutorial disponibili online nella pagina web: scidavis.sourceforge.net/help/manual/.

[2] ASCII è l'acronimo di **A**merican **S**tandard **C**ode for **I**nformation **I**nterchange (ovvero Codice Standard Americano per lo Scambio di Informazioni); è un sistema di codifica dei caratteri, pubblicato dall'American National Standards Institute nel 1968.

Le funzioni di analisi disponibili consentono di effettuare statistiche sulle colonne/righe, convoluzioni e deconvoluzioni, trasformate di Fourier, ecc. Possono essere determinate curve di adattamento (curve di fitting) con funzioni definite dall'utente oppure con quelle già disponibili. Infine, i grafici possono essere esportati in vari formati, come BMP, PDF, EPS o SVG.

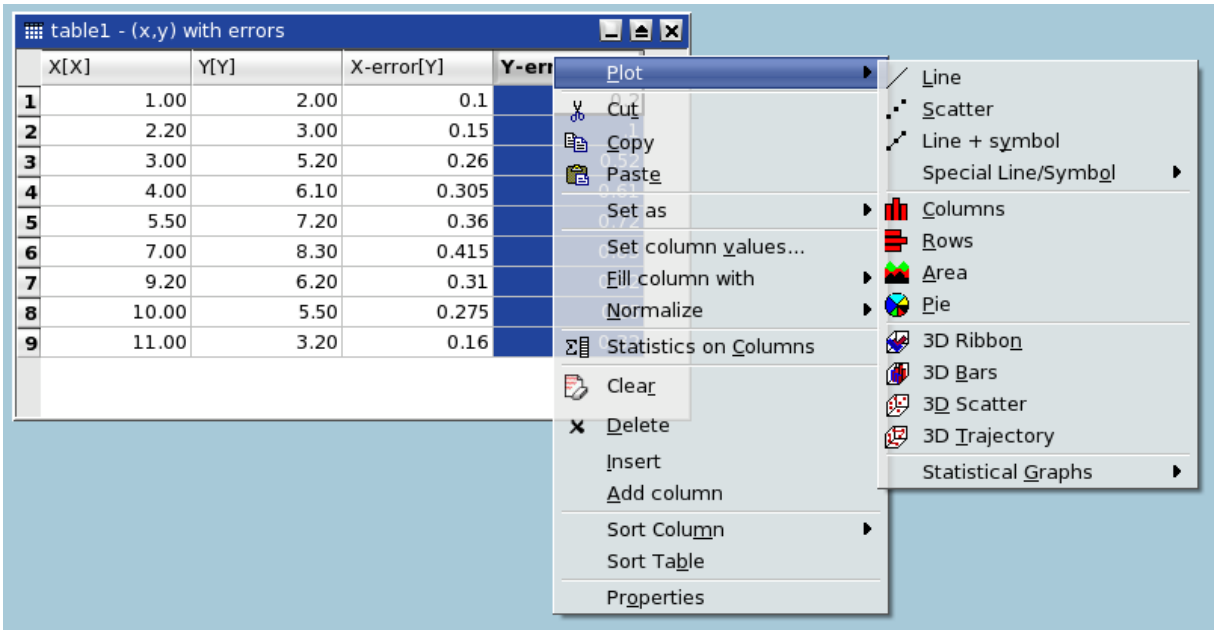


Figura J.1: Una schermata di SciDAVis; in figura è mostrata la tabella dati e il menù **Plot**.

Ciascuna colonna della tabella dati ha un'etichetta e può essere assegnato uno specifico formato: numerico, testo, data o tempo, come si vede in Figura J.1. In una tabella, le colonne possono avere le seguenti etichette: X, Y, Z, X-*error*, Y-*error*, oppure possono essere colonne semplici senza una specifica etichetta. Le colonne X sono le ascisse mentre le colonne Y sono le ordinate usate per creare grafici 2D a partire dai dati. Le colonne X-*error* e Y-*error* possono essere usati per aggiungere le barre d'errore nei grafici 2D. Queste etichette possono essere cambiate usando il comando `Column options`; per arrivare a questo comando, basta fare un doppio clic sull'etichetta della colonna, oppure usare il comando `Column Options` dal menù dei comandi.

È possibile selezionare tutte le colonne del foglio di calcolo (`Ctrl A`) o solo alcuni di essi cliccando sul l'etichetta di colonna tenendo premuto il tasto `Ctrl`, o spostando il mouse sopra l'etichetta di colonna; ciò permette anche di deselezionare le colonne. Sulle colonne selezionate è possibile eseguire diverse operazioni: inserire dati, normalizzare, ordinare, visualizzare statistiche e, infine, riportare in grafico i dati. Tutte queste funzioni possono essere raggiunte facendo clic col tasto destro sull'etichetta di colonna o utilizzando il menu `Table`. Qualsiasi altra funzione del foglio di calcolo: rinominare, duplicare, espor-

tare, stampare, può essere eseguita tramite il menu contestuale (tasto destro del mouse in qualsiasi punto della tabella di fuori dell'area dell'etichetta della colonna). È possibile tagliare, copiare e incollare i dati tra fogli di calcolo o tra un foglio e un'altra applicazione. È possibile importare uno o più file ASCII utilizzando il comando `Importa ASCII` dal menu `File` e naturalmente è possibile esportare i dati dal foglio di calcolo in un file di testo utilizzando il comando `Esporta ASCII`.

Qui di seguito riportiamo i principali comandi riguardanti i grafici (tra parentesi è indicata la combinazione di tasti per attivare il comando).

Select Column (Ctrl A). Seleziona tutte le colonne del foglio di calcolo.

Add Error Bars (Ctrl B). Aggiunge le barre d'errore alla curva del grafico nella finestra attiva.

Add/Remove Curves (Alt C). Aggiunge o rimuove curve dal grafico nella finestra attiva.

Data Reader (Ctrl D). Cambia il grafico attivo nella modalità `Data Display` e consente quindi di visualizzare i valori dei punti nel grafico

Select Data Range (Alt S). Cambia il grafico attivo nella modalità `Select Data Range` e consente quindi di selezionare un intervallo di dati

Screen Reader. Consente di visualizzare le coordinate del cursore rispetto agli assi del grafico attivo.

Move Data points (Ctrl Alt M). Permette di spostare i punti (aggiustare i valori) nel grafico attivo

Remove Bad Data Points (Alt B). Permette di eliminare i punti nel grafico attivo

Add Text (Alt T). Aggiunge un nuovo elemento di testo nel grafico attivo

Draw Line (Ctrl Alt L). Aggiunge una nuova linea nel grafico attivo

Draw Arrow (Ctrl Alt A). Aggiunge una nuova freccia nel grafico attivo

Per maggiori informazioni, consultare il manuale d'uso e i vari tutorial online:
scidavis.sourceforge.net/help/manual/
Il manuale *SciDAVis user's guide* in formato PDF può essere scaricato dal seguente link:
www-mdp.eng.cam.ac.uk/web/CD/engapps/scidavis/scidavis.pdf

Appendice K

Suggerimenti per la stesura delle relazioni di laboratorio

Dopo avere svolto l'esperienza di laboratorio è necessario elaborare una relazione. La relazione va scritta, con un qualunque programma di video scrittura, su fogli in formato A4, interlinea 1.5 e font 12 pt. È bene che le pagine, tabelle, figure e formule siano numerate, almeno quando sono richiamate nel testo. Ogni relazione deve riportare, sulla prima pagina, il titolo dell'esperienza, la data e i componenti del gruppo, in modo da potere identificare subito il gruppo di lavoro e l'esperienza descritta nella relazione. Inoltre, è possibile confrontare i risultati ottenuti da persone diverse, o in giorni diversi, e ottenere co sì nuovi spunti di riflessione.

Nella parte iniziale della relazione, va riportato brevemente lo scopo dell'esperienza, il materiale a disposizione ed eventualmente lo schema dell'apparato di misura. Lo scopo definisce gli obiettivi da raggiungere alla fine dell'esperienza di laboratorio. Per gli strumenti a disposizione, riportare la risoluzione e l'errore di precisione quando è specificato. Si può fare una, molto breve, introduzione teorica, riportando le formule che si useranno per la propagazione degli errori nelle misure indirette. Vanno riportate le misure effettuate, opportunamente organizzate in tabelle ordinate (rappresentazione tabellare), e vanno riportate le incertezze delle misure con le loro unità di misura.

Di norma, è bene prendere appunti su un quaderno di laboratorio e, una volta concluso il lavoro sperimentale, preparare la relativa relazione. Descrivere i diversi passaggi dell'attività pratica, includendo ove necessario schemi descrittivi. Riportare la descrizione di tutto ciò che si ritiene importante per la comprensione del fenomeno studiato; raccogliere i dati ottenuti in tabelle (rappresentazione tabellare); procedere con la costruzione di grafici (rappresentazione grafica), per la successiva elaborazione.

Si elaborano quindi i dati e si presentano i risultati, con eventuali brevi commenti

sulla procedura e sui problemi riscontrati. In questa parte della relazione vanno inseriti i problemi in cui ci si è imbattuti nel corso dell'esperimento, specificando se si tratta di lacune nello svolgimento dell'esperimento oppure nell'uso degli strumenti.

Qualsiasi elaborazione dei dati (per esempio misure indirette, valutazione dell'incertezza, ecc.) deve essere descritta, riportando la procedura e le formule. Qualsiasi risultato finale deve essere scritto con l'incertezza e l'unità di misura, e con il corretto numero di cifre significative (vedi Capitolo 2). Vanno evidenziati eventuali risultati palesemente inaspettati o "strani".

Le dimensioni del grafico e le scale degli assi devono essere scelte opportunamente in modo che dati siano rappresentati graficamente in modo chiaro e leggibile. Sugli assi devono essere riportate le etichette e le unità di misura. I punti sperimentali devono riportare le incertezze, se apprezzabili, per entrambe le variabili indipendente e dipendente. Evitare di interpolare tra i punti sperimentali anche con tratti rettilinei, in quanto ciò renderebbe meno chiara la lettura del grafico.

Alla fine della relazione è utile riportare un quadro riassuntivo con l'interpretazione e/o giustificazione dei risultati ottenuti. Infine, si sottolinea l'importanza di organizzare bene e in modo ordinato le informazioni presentate nella relazione al fine di facilitare il lavoro di valutazione che deve svolgere il docente.

Come fare un grafico

Nella costruzione di un grafico scientifico, sia che esso sia prodotto a mano o al computer, ci sono diverse regole di base che dovrebbero essere seguite. Il grafico deve essere abbastanza grande da essere letto e deve essere di facile comprensione, con ascisse e ordinate opportunamente proporzionate. Si può scegliere un rapporto $x : y = 2 : 3$ (tipo "ritratto") oppure $x : y = 3 : 2$ (tipo "paesaggio"). Gli assi devono essere etichettate con lettere grandi e chiare; le scale degli assi e le unità di misura devono essere chiaramente indicate. I punti sperimentali devono essere rappresentati con le corrispondenti barre d'errore, se apprezzabili, per entrambe le variabili indipendente e dipendente. Se vengono visualizzate più funzioni o se sono visualizzati sia i dati sia le curve teoriche, un riquadro, o una legenda, può essere sovrapposto al grafico per indicare il significato dei diversi simboli e/o linee usati.

Nelle riviste scientifiche, una descrizione del grafico è generalmente inclusa come didascalia posizionata sotto l'etichetta dell'asse delle ascisse. Per facilitare la lettura della relazione di laboratorio, una breve descrizione può essere inclusa in un riquadro sul grafico, ma è importante che il testo sia sufficientemente grande da essere chiaramente leggibile.

Si dovrebbe evitare di riportare in uno stesso grafico più relazioni funzionali, evitando in questo modo che il grafico abbia un aspetto confuso. Un grafico fatto correttamente non dovrebbe richiedere molte parole di spiegazione.

In genere, è consigliabile riportare la variabile indipendente come ascissa e la variabile dipendente come ordinata. Tuttavia, se i valori della variabile indipendente hanno un alto grado di incertezza mentre i corrispondenti valori della variabile dipendente sono stati rilevati con alta precisione, allora potrebbe essere opportuno scambiare i due assi per semplificarne la successiva analisi.

Per le scale, si devono scegliere valori e intervalli ragionevoli sui due assi. Ad esempio, se i valori delle ascisse vanno da 0 a 400, potrebbe essere ragionevole dividere l'asse x in otto parti e quindi contrassegnare l'ascissa con segni di graduazione principali in corrispondenza di 0, 100, 200, 300 e 400, con segni di graduazione secondari a metà divisione, come illustrato in Figura K.1a. Dividendo l'asse in sei parti e mettendo i segni di divisione a 66.7, 133.3 e così via (Figura K.1b), renderebbe molto difficile l'interpretazione del grafico da parte di un lettore.

In generale, le barre di errore dovrebbero essere incluse per le variabili riportate in ordinata, eccetto per gli istogrammi in cui le incertezze vanno specificate nella didascalia oppure nel testo. Le barre di errore, di solito, non sono necessarie per le variabili riportate in ascissa; tuttavia, se necessario, esse possono essere riportate in grafico per indicare la precisione delle misure.

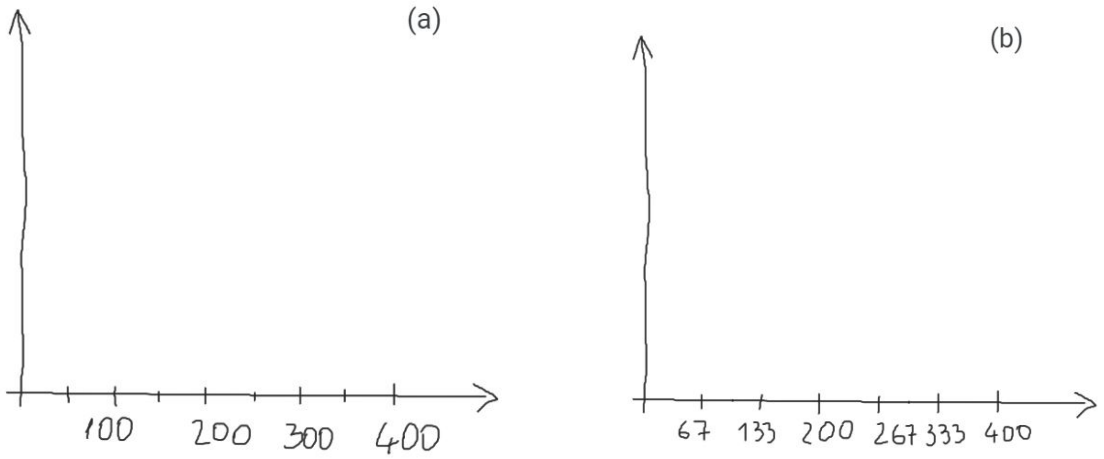


Figura K.1: Costruzione della scala sull'asse delle ascisse di un grafico: (a) scelta corretta, (b) scelta sbagliata.

Appendice L

Multipli e sottomultipli

Prefissi e fattori nel sistema SI.

Prefisso		**Fattore**
Nome	Simbolo	
yotta	Y	10^{24}
zetta	Z	10^{21}
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
etto	h	10^{2}
deca	da	10
unità		1
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}
zepto	z	10^{-21}
yocto	y	10^{-24}

Appendice M

Alfabeto greco

α		A	alfa	ξ		Ξ	xi
β		B	beta	o		O	omicron
γ		Γ	gamma	π	ϖ	Π	pi
δ		Δ	delta	ρ	ϱ	P	rho
ϵ	ε	E	epsilon	σ	ς	Σ	sigma
ζ		Z	zeta	τ		T	tau
η		H	eta	υ		Y	ypsilon
θ	ϑ	Θ	theta	ϕ	φ	Φ	fi
κ	$\varkappa$	K	kappa	χ		X	chi
λ		Λ	lambda	ψ		Ψ	psi
μ		M	mu/mi	ω		Ω	omega
ν		N	nu/ni				

Appendice N

Costanti fisiche di uso frequente

Accelerazione di gravità	9.80 m/s^2
Pressione atmosferica standard (atm)	1.013×10^5 Pa
Numero di Avogadro (N_A)	6.022×10^{23} particelle/mol
Costante universale dei gas perfetti (R)	8.314 $\times$ J/mol K
Densità dell'acqua (20°C e 1 atm)	1.00×10^3 kg/m^3
Densità dell'aria (0°C e 1 atm)	1.29×10^3 kg/m^3
Raggio medio della Terra	6.37×10^6 m
Distanza media Terra-Luna	3.84×10^8 m
Distanza media Terra-Sole	1.496×10^{11} m
Massa della Terra	5.97×10^{24} kg
Massa della Luna	7.35×10^{22} kg
Massa del Sole	1.99×10^{30} kg
Massa dell'elettrone	9.109×10^{-31} kg
Massa del neutrone	1.675×10^{-27} kg
Massa del protone	1.673×10^{-27} kg

Bibliografia e sitografia

[1] Agliolo Gallitto A., Lupo L. (2015). *A mechanical model of the smartphone's accelerometer*. Phys. Educ. **50**, 646-647.

[2] Agliolo Gallitto A. et al (2017). *The silver voltameter: an essential instrument for the definition of the unit of electric current*. Bull. Sci. Instrum. Soc. **134**, 26-28.

[3] Agliolo Gallitto A. et al (2021). *Dynamic measurement of the elastic constant of an helicoidal spring by a smartphone*. Phys. Educ. **56**, 035010.

[4] Aglione F., Agliolo Gallitto A., Fiordilino F. (2013). *'Naughty cylinder' mechanical paradox*. Phys. Educ. **48**, 137-139.

[5] Amaldi U. (1995). *Fisica per temi: laboratorio*. Zanichelli, Bologna.

[6] Biondo G., Sacchi E. (1986). *Manuale di elettronica e telecomunicazioni*. II Ed., Hoepli, Milano.

[7] Bladon P. (2006). *A dictionary of international units*, II Ed., iUnivers, Lincoln.

[8] Bridgman P. W. (1965). *La logica della fisica moderna*, Boringhieri, Torino.

[9] Brookshear J. G. (2004). *Informatica*. VII Ed., Pearson, Milano.

[10] Cannelli G. (2000). *Metodologie sperimentali in fisica*. Edises, Napoli.

[11] Castro-Palacio J. C., Velázquez-Abad L., Giménez M. H., Monsoriu J. A. (2013). *Using a mobile phone acceleration sensor in physics experiments on free and damped harmonic oscillations*. Am. J. Phys. **81**, 472-475, DOI: 10.1119/1.4793438. 179

[12] Chinnici I. (a cura di) (2015). *Cerere Ferdinandea*. INAF - Osservatorio Astronomico "Giuseppe S. Vaiana", Palermo.

[13] Consoli E., Rappanello P. (1996). *Laboratorio di fisica e chimica*. Paravia, Torino.

[14] Davidson R. C. (2013). *Metodi Matematici per un Corso Introduttivo di Fisica*. II Ed., EdiSES, Napoli.

[15] Di Ciaccio A., Borra S. (2008). *Statistica: metodologie per le scienze economiche*. McGraw-Hill, Milano.

[16] Estácio dos Reis A. (1999). *Navios e navegações - Portugal e o Mar. The Nonius of Pedro Nunes*. Oceanos **38**. (Disponibile online: cvc.instituto-camoes.pt/ciencia_eng/e20c.html)

[17] Feynman R., Leighton R., Sands M. (2013). *The Feynman Lectures on Physics*. Vol. I, New Millennium ed. (Edizione online del California Institute of Technology, a cura di Gottlieb M. A. e Pfeiffer R., Pasadena, CA)

[18] Fazio M. (1971). *I campioni di unità di misura*, Le Scienze **31**, 40-50.

[19] Fazio M. (1995). *Dizionario e manuale delle unità di misura*, III Ed., Zanichelli, Bologna.

[20] Ferry J. (1980). *Viscoelastic Properties of Polymers*. Wiley, New York.

[21] Filatrella G., Romano P. (2009). *Elaborazione statistica dei dati sperimentali con elementi di laboratorio*. Edises, Napoli.

[22] Fiordilino E., Agliolo Gallitto A. (2010). *Il laboratorio di fisica nel 'Progetto Lauree Scientifiche'*. Aracne, Roma.

[23] Frasca S. (2009). *Laboratorio di Meccanica*, Ed. Nuova Cultura, Roma. (Disponibile online: grwavsf.roma1.infn.it/labmec/LabMec.pdf)

[24] Hmurcik L., Slacik A., Miller H., Samoncik S. (1989). *Linear regression analysis in a first physics lab*. Am. J. Phys. **57**, 135-138.

[25] PSSC (a cura di) (1995). *FISICA. Guida al laboratorio*. IV Ed., Zanichelli, Bologna.

[26] Rodriguez E. R., Gesnouin G. A. (2007). *Effettive mass of an oscillating spring*. Phys. Teac. **45**, 100-103.

[27] Scinà D. (1833). *Elementi di Fisica*. dalla Società Tipografica de' Classici Italiani, Milano.

[28] Serway R. A., Jewett J. W. (2018). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*. Cengage Learning, 10th ed., ISBN: 978-1337553292. 179

[29] Severi M. (1982). *Introduzione alla sperimentazione fisica*. Zanichelli, Bologna.

[30] Staacks S. et al (2018). *Advanced tools for smartphone-based experiments: phyphox.* Phys. Educ. **53**, 045009.

[31] Taylor J. R. (1999). *Introduzione all'analisi degli errori: lo studio delle incertezze nelle misure fisiche*. II Ed., Zanichelli, Bologna.

[32] Tibone F. (2007). *L'esame per la patente del computer*. Zanichelli, Bologna.

* * *

[33] *Apache OpenOffice*: www.openoffice.org/it/

[34] *Beaureau International des Poids et Measures* (BIPM): www.bipm.org

[35] *Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica* (INRIM): www.inrim.it

[36] *KDEdu, LabPlot, Interactive graphing and analysis of scientific data*: edu.kde.org/labplot/

[37] *National Institute of Standard and Technology* (NIST): www.nist.gov

[38] *National Institute of Standard and Technology, Fundamental Physical Constants*: www.nist.gov/pml/fundamental-physical-constants

[39] *Phyphox, physical phone experiments*: phyphox.org.

[40] *QtiPlot, Data analysis and scientific visualisation*: www.qtiplot.com

[41] *SciDAVis, Scientific Data Analysis and Visualization*: scidavis.sourceforge.net

[42] *Vernier, Graphical analysis*: www.vernier.com/products/graphical-analysis/

[43] *Vernier, Go Direct motion detector*: www.vernier.com/product/go-direct-motion-detector/

[44] *YouTube, Using the Go Direct Motion Detector*: youtu.be/CS1psm8rdww

Indice analitico

π, 92, 122

Accelerometro, 200
Accuratezza, 32, 33
Acquisizione dati, 73, 87
Aleatorio, 166
Alfabeto greco, 219
ampere, 4
Amperometro analogico, 38, 45
Analisi dati, 73, 87
Analisi statistica, 165
Angolo, 9
- definizione di, 9
- giro, 9
- piatto, 9
- retto, 9
- solido, 11

Angstrom, 15
Apache OpenOffice, 205
Approssimazione, 14
- per difetto, 14
- per eccesso, 14

Asse delle ascisse, 88
Asse delle ordinate, 88
Asteroide, 133
Atomo, 13
- raggio medio del, 13

Attrito viscoso, 178

Bayes, 166
Bernoulli, 166
Bilancia
- digitale, 42, 105, 107
- Mancur, 30

Bladon P., 4
Bluetooth, 193
Bridgman P. W., 1

Calibro, 185
- a corsoio, 185
- nonio, 185
- Palmer, 185, 190
- regolo, 185
- ventesimale, 105

Campione statistico, 172
Campo di misura, 27
candela, 4, 5
Canna, 6
Cardano, 165
Casuale, 166
Cerere Ferdinandea, 133
chilogrammo, 4
Cifre significative, 14, 80
Civiltà pre-elleniche, 3
Classe, 115
Classe di precisione, 35, 37, 39
Coefficienti di sensibilità, 70
Confidenza, 145
- intervallo di, 145

Costanti fisiche, 221
Curva di risposta, 26

Dati sperimentali, 73
De Finetti, 167
de Moivre, 166
Densità, 62, 63, 105
Densità di frequenza, 116
Derivata, 66
- significato geometrico, 67
Deviazione, 76
Deviazione standard, 77, 148
- della media, 77, 149
Diagramma a barre, 111, 113
Digit, 49
Discrepanza, 83, 156
Distribuzione
- di Gauss, 129
- gaussiana, 130
- normale, 129, 130
- uniforme, 121
Distribuzione di probabilità, 139
- continua, 140
- discreta, 140
Distribuzione limite, 118, 140

Equatore terrestre, 15
Errore, 20, 73, 77, 87, 153, 154
- aleatorio, 21
- assoluto, 22
- - massimo, 59, 76
- casuale, 21, 73, 80, 153
- di interpolazione, 39
- di lettura, 25, 41, 117
- di parallasse, 20
- di precisione, 32, 33, 37, 41
- in qualunque funzione di più variabili, 70
- in una funzione arbitraria, 66
- nel prodotto, 52
- nel rapporto, 52
- nella differenza, 50, 51
- nella lettura di scale, 22
- nella potenza, 55
- nella somma, 50, 51
- nelle misure dirette, 20
- probabile, 59, 146
- relativo, 22, 94
- - percentuale, 22
- sistematico, 21, 73
- statistico, 154
- strumentale, 25, 73, 80, 153, 154
Errori, 57, 79
- casuali, 57, 79
- in scala logaritmica, 102
- indipendenti, 57
- nelle misure dirette, 48
- nelle misure indirette, 47, 65
- propagazione degli, 47, 65
- sistematici, 79
- somma in quadratura, 59
Eventi incompatibili, 172
Eventi indipendenti, 172
Eventi mutuamente esclusivi, 172

Fazio M., 4, 5
Fermat, 165
Foglio di calcolo, 205, 209
- riferimenti, 205
- riferimenti tra celle
- - assoluti, 206
- - relativi, 206
Foglio elettronico, 205
Fondoscala, 37
Frequenza

- assoluta, 113
- relativa, 113

Funzione densità di probabilità, 142

Funzione di distribuzione, 118
- cumulativa, 146

Funzione di Gauss, 130

Funzione di probabilità, 144
- cumulata, 142

Funzione di ripartizione, 142, 146

Funzione linearizzabile, 98

Galileo Galilei, 165

Galton, 172

Gascoigne William, 190

Gauss, 129, 130, 166

Gaussiana, 130, 136, 137, 152

Grado, 9
- centesimale, 9
- sessagesimale, 9

Grado di precisione, 14, 32

Grandezze fisiche, 2
- adimensionali, 9
- derivate, 2
- fondamentali, 2
  - intensità di corrente elettrica, 4
  - intensità luminosa, 4, 5
  - intervallo di tempo, 4
  - lunghezza, 2, 4
  - massa, 2, 4
  - quantità di sostanza, 4, 5
  - temperatura assoluta, 4, 5
  - tempo, 2

Huygens, 165

Igrometro, 29

Incertezza, 20, 73, 87
- nella lettura di scale, 22
- nelle misure dirette, 20

Indeterminazione, 73, 87

Indici di dispersione, 76
- deviazione standard, 77
- varianza, 76

Indici di posizione, 74

Integrale normale degli errori, 144–146, 183

Interpolazione, 24, 39

Intervallo di dispersione, 32, 74

Intervallo di funzionamento, 27

Intervallo di sensibilità, 117

Istogramma, 111, 115, 124
- classe, 115

kelvin, 4, 5

Kolmogorov, 167

LabPlot, 209

Laplace, 166

Larghezza a metà altezza, 121, 136

Legge di potenza, 68, 98, 109

Legge esponenziale, 100

LibreOffice, 205

Linearizzazione, 95

Livello di confidenza, 146, 156

Livello di significatività, 146, 156

Media, 74, 75, 78
- aritmetica, 74, 75
- di una serie di misure, 75
- pesata, 78, 113
- ponderata, 78

Mediana, 75

Metodo dei minimi quadrati, 181

Metodo grafico, 90

Metodo Monte Carlo, 122

Metro
- a nastro, 35
- da carpentiere, 36
- ripiegabile, 36

metro, 4
Metro campione, 4, 7
Micrometro, 190
Microsoft Excel, 205
Misura, 2
Misurazione, 2
Misure dirette, 20
Moda, 76, 114
mole, 4, 5
Molla, 175
- con massa, 175
- massa effettiva, 175

Molla elicoidale, 106, 108
Multimetro analogico, 38
Multipli, 8, 217
Multipli e sottomultipli, 217

Núñes Pedro, 185
Nonio, 186
Normalizzazione, 113, 142
- condizione di, 142
- costante di, 130

Notazione scientifica, 11, 12, 14, 16
Nucleo atomico, 13
- raggio medio del, 13

Ordine di grandezza, 12
Origin, 209
Oscillatore armonico, 175, 200
- fase, 176
- frequenza angolare, 176
- periodo, 176
- smorzato, 178

Oscillatore viscoelastico, 178

Palmer Jean-Laurent, 190
Palmo, 6
Parametro di copertura, 154
Parametro di larghezza, 130, 132
Pascal, 165
Pearson, 172
Percentile, 75
Phyphox, 200
Pianeta nano, 133
Poisson, 172
Porta USB, 193
Portata, 27
Potenze, 11
- di 10, 11

Precisione, 32, 37
Principio di massima verosimiglianza, 148, 151
Probabilità, 165
- condizionata, 171
- definizione classica, 166
- definizione classica di Laplace, 166
- definizione frequentista, 166
- definizione frequenzistica, 166
- definizione frequenzistica (o frequentista), 140
- definizione soggettivista, 166, 167
- metodo empirico, 139
- occorrenza frazionaria, 140
- teoria assiomatica, 167

Prontezza, 34, 37
Punto triplo dell'acqua, 5

QtiPlot, 209
Quartile, 75
Quetelet, 172

Radianti, 9
Raggio terrestre, 15
Ragguaglio, 6, 7
- fattore di, 6
Random, 166
Rappresentazione grafica, 87, 88
- di una funzione, 87
Rappresentazione tabellare, 89
Relazione di laboratorio, 213
Retta, 90
- coefficiente angolare della, 90
- di *best fit*, 92
- di massima pendenza, 90, 92, 105
- di minima pendenza, 90, 92, 105
Riga graduata, 35, 106
Righello, 22
Risoluzione, 27, 41

Scala graduata, 22
Scala logaritmica, 95
Scarto, 74, 76, 77
- quadratico medio, 77
SciDAVis, 209
- Grafico 2D, 209
- Grafico 3D, 209
secondo, 4
Semi-larghezza a metà altezza, 121, 136
Semidifferenza, 50
Semidispersione, 76
Semisomma, 74
Sensibilità, 27, 28, 37
- soglia di, 28
Sensore di movimento Go Direct, 196
Sensori *real time*, 193
Sfera, 14
- superficie della, 15
- volume della, 14, 15, 17
SigmaPlot, 209
Sistema metrico decimale, 6
Sistemi di unità di misura, 3
- cgs, 5
- inglese, 6
- MKS, 5
- Sistema Internazionale (SI), 3
- tecnico, 5
- termo-tecnico, 6
Smartphone, 199
Soglia, 27
Sole, 13
- raggio medio del, 13
Sottomultipli, 8, 217
Spreadsheet, 205, 209
Standardizzazione, 132
Statistica, 165, 172
- campione, 172
- carattere, 173
- classe, 173
- descrittiva, 172
- grandezze qualitative, 173
- grandezze quantitative, 173
- inferenziale, 172
- modalità, 173
- popolazione, 172
- variabile continua, 173
- variabile discreta, 173
Steradiante, 11
Strumenti di misura, 25, 185
- analogici, 25
  - - elettromeccanici, 36
  - - meccanici, 35
- curva di risposta, 26
- digit, 25

- digitali, 25, 40
- divisione, 27
- fondoscala, 27
- rivelatore, 26
- trasduttore, 26
- visualizzatore, 26

Superficie, 2

Taratura
- curva di, 95
- grafico di, 95

Tempo di risposta, 34
Teoria della probabilità, 165
Terra, 13
- raggio medio della, 13

Trasformazione lineare, 75

Unità di misura, 2

Valore medio, 75
Valore modale, 114
Valore vero, 20, 73
Varianza, 76, 121
Velocità, 2
Vernier, 193
- sensore di movimento Go Direct, 196, 198
- Graphical Analysis, 193, 196

Vernier Pierre, 186
Verniero, 186
Via Lattea, 13
- dimensioni della, 13

Viscoelasticità, 178
Voltmetro analogico, 24, 39
- classe di precisione, 39

Aurelio Agliolo Gallitto è professore associato di Didattica e Storia della Fisica presso l'Università degli Studi di Palermo. La sua attività di ricerca ha riguardato lo studio delle proprietà elettromagnetiche dei superconduttori in regime lineare e non lineare e lo sviluppo cavità superconduttrici risonanti a frequenze di microonde. Attualmente, si occupa di storia e sviluppo degli strumenti scientifici e delle loro applicazioni nella didattica. È autore di molti articoli scientifici su queste tematiche di ricerca. Ha svolto diversi insegnamenti di Fisica Generale e di Laboratorio di Fisica nei Corsi di Studio dell'Università di Palermo ed è attualmente titolare del primo modulo dell'Insegnamento di Laboratorio di Fisica I per il Corso di Laurea in Scienze Fisiche. Da anni svolge attività di orientamento e divulgazione scientifica in collaborazione con molte scuole secondarie del territorio.

Il volume *Introduzione al Laboratorio di Fisica: gli errori nelle misure sperimentali* affronta il problema della stima degli errori nelle misure dirette e la propagazione degli errori nelle misure indirette. Nel volume vengono introdotti anche i metodi elementari di analisi statistica dei dati sperimentali e viene quindi definita la funzione di distribuzione di Gauss per gli errori casuali. Per il livello degli argomenti trattati, il libro è indicato per l'insegnamento del Laboratorio di Fisica nei Corsi di Studio a carattere scientifico.



ISBN 978-88-941245-9-0